उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04
व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड

1

सांख्यिकी का परिचय (Introduction to Statistics)

परामर्श-समिति

प्रो0 नागेश्वर राव — **कुलपति - अध्यक्ष**
डॉ0 हरीशचन्द्र जायसवाल — वरिष्ठ परामर्शदाता - कार्यक्रम संयोजक
श्री एम0 एल0 कनौजिया — कुलसचिव - सचिव

संरचनात्मक सम्पादन

डॉ0 मंजूलिका श्रीवास्तव — निदेशक, दूरस्थ शिक्षा परिषद्, नई दिल्ली

विषयगत सम्पादन

प्रो0 आर0 के0 जैन — अवकाश प्राप्त निदेशक एवं संकायाध्यक्ष, प्रबन्ध संकाय, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

लेखक

डॉ0 सुबोजित बनर्जी — असिस्टेन्ट प्रोफेसर, डिपार्टमेन्ट आफ बिजिनेस एडमिनिस्ट्रेशन, वीर बहादुर सिंह पूर्वांचल विश्वविद्यालय, जौनपुर

प्रस्तुत पाठ्य सामग्री में विषय से सम्बन्धित सभी तथ्य एवं विचार मौलिक रूप से लेखक के स्वयं के हैं।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010
मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड- परिचय

सांख्यिकी का महत्व किसी भी राष्ट्र के प्रत्येक व्यक्ति के लिए है। राजनीतिज्ञ, समाज सुधारक, नौकरशाह, वैज्ञानिक, चिकित्सक, अध्यापक, उद्यमी एवं प्रबन्धक, अथवा आम नागरिक, सभी को अपने-अपने क्षेत्र में विभिन्न प्रकार के आकड़ों एवं उनके विश्लेषण का सामना करना पड़ता है। इन्हीं बिन्दुओं को ध्यान में रखते हुए, यह पाठ्यक्रम व्यवसायिक सांख्यिकी (M.Com.-04)निर्धारित किया गया है । यह पाठ्यक्रम पाँच खण्डों में प्रस्तुत किया जा रहा है।

प्रस्तुत खण्ड सांख्यिकी का परिचय (Introduction to Statistics) इसी क्रम में प्रथम है। इसके अन्तर्गत पाँच इकाइयाँ है।

(1) केन्द्रीय प्रवृत्ति का परिदृश्य (Overview of Central Tendency)

(2) परिघात एवं विषमता (Dispersion and Skewness)

(3) प्रायिकता सिद्धान्त -। (Probability Theory - I)

(4) प्रायिकता सिद्धान्त - ।। (Probability Theory - II)

(5) सप्रतिबन्ध सिद्धान्त एवं वेज प्रमेय (Conditional Theory and Byes Theorem)

इकाई 1 : केन्द्रीय प्रकृति के माप

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् पाठक :

- केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के बारे में अध्ययन करेंगे, जो आँकड़ों की संक्षिप्त रूप में व्याख्या करने की संख्यात्मक विधि है।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप प्रतिनिधि या विशिष्ट मान के रूप में आँकड़ों के संक्षेपण का एक तरीका है। इसका ज्ञान प्राप्त करेंगे।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति या औसतों के कई सांख्यिकी माप हैं। तीन सर्वाधिक प्रचलित औसत निम्नलिखित है :-
  - समांतर माध्य
  - मध्यिका
  - बहुलक, इनका ज्ञान प्राप्त करेंगे ।

1.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय समंको का वर्गीकरण, सारणीयन तथा संपादन करने के पश्चात् अगला चरण होता है, समंको का विश्लेषण तथा निष्कर्ष निकालना। विश्लेषण तथा निष्कर्ष के पहले की क्रियाएं केवल समंकों को एक दिशा तथा रूप प्रदान करने की होती है। परन्तु यह सामग्री (समंक), तभी उपयोगी सिद्ध होते हैं जब उनके मध्य तुलनात्मक सम्बन्ध, अन्तर सम्बन्ध तथा अन्य गणितीय संम्बन्धों को स्थापित करके कुछ निष्कर्ष निकाला जा सके तथा वह निष्कर्ष सम्बन्धित पक्षों के लिए उपयोगी तथा लाभदायक सिद्ध हो सके। इस दृष्टी से ऐसे मापन की आवश्यकता होती है जो समग्र या समष्टि का प्रतिनिधित्व करती हो। ऐसे मापनों में यह गुण होना चाहिए कि वह किसी भी पद का पूर्ण प्रतिनिधित्व सूक्ष्मतम संभव शब्दों या अंकों में कर सके। इस प्रकार के मापों को 'केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप' कहा जाता है। इनको केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि सामान्यतः यह किसी भी पद के केन्द्र अथवा मध्य में स्थित होते हैं। इन्हें सामान्य बोलचाल में औसत अथवा माध्य कहते हैं। क्लार्क एवं शकाडे के अनुसार ''माध्य संपूर्ण संख्याओं का विवरण प्रस्तुत करने के लिए एक मात्र संख्या प्राप्त करने का प्रयास है।''

आधुनिक काल में माध्यों का प्रयोग अध्ययन एवं शोध के सभी क्षेत्रों में किया जाता है, तथा बहुत से लोग इसका प्रयोग करके सांख्यिकी से परिचित होते हैं। डा. ए. एल. वाउले ने सांख्यिकी को 'माध्यों का विज्ञान' भी कहा है। अनभिज्ञ व्यक्ति भी प्रायः किसी भी समस्या का औसतन अध्ययन करता है। प्रो. क्रोक्स्ट्न एवं कोड्न के अनुसार 'माध्य समंको के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा एकल मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी

के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। चूंकि माध्य, सदैव समंकों के विस्तार के अन्तर्गत ही स्थित होता है, इसलिए बहुधा इसको केन्द्रीय मूल्य (प्रवृत्ति) का माप कहा जाता है। 'स्पर केलोग' एवं स्मिथ के अनुसार 'माध्य को कभी-कभी केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि चरों के व्यक्तिगत मूल्य बहुधा उसी के इर्द-गिर्द जमा होते हैं।

1.2 माध्यों के प्रकार

सांख्यिकी विज्ञान की रीतियों में माध्यों अथवा केन्द्रिय प्रवृत्ति के मापनों का एक महत्वपूर्ण स्थान है, क्योंकि सांख्यिकीय विश्लेषण की विभिन्न विधियाँ माध्य पर ही आधारित होती हैं। विभिन्न श्रेणियों में तुलनात्मकता माध्यों के द्वारा ही स्थापित की जाती है तथा माध्य ही समष्टि की विशेषताओं को संक्षिप्त रूप से प्रकट करते हैं। सामान्य प्रयोग की दृष्टि से पांच मुख्य प्रकार के माध्य होते हैं।

1. सामान्तर माध्य अथवा औसत
2. मध्यिका
3. बहुलक
4. गुणोत्तर माध्य
5. हरात्मक माध्य

बोधात्मक प्रश्न (क)

निम्नलिखित कथनों में कौन सा सही है।

(अ) किसी सारणी में एक से अधिक माध्य हो सकते हैं।

(ब) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप उन मापों को दर्शाता है जो समग्र या समष्टि का प्रतिनिधित्व करती हैं।

(स) माध्यों को केन्द्रीय प्रवृत्ति इसलिए कहा जाता है क्योंकि चरों के व्यक्तिगत मूल्य बहुदा उसी के इर्द-गिर्द जमा होते हैं।

(द) पदों के समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को प्रदर्शित करने वाली महत्वपूर्ण संख्या माध्य है।

1.3 समान्तर माध्य अथवा औसत

सामान्तर माध्य अथवा सामान्तर औसत गणीतिय माध्यों में सबसे लोकप्रिय तथा प्रचलित माध्य है, जो किसी न किसी प्रकार से प्रत्येक व्यक्ति द्वारा नित्यप्रति जीवन में प्रयोग किया जाता है। इसे सामान्य बोलचाल की भाषा में औसत के रूप में संबोधित

किया जाता है। यह मध्य दो प्रकार के होते हैं - (अ) साधारण समान्तर माध्य (ब) भारित समान्तर माध्य'। किसी श्रेणी के सभी मूल्यों के योग को उन पदों की संख्या से भाग देने से प्राप्त राशि को समान्तर माध्य अथवा समान्तर औसत कहते हैं। जिस माध्य में पदों को उनके व्यक्तिगत गुणों के आधार पर भार प्रदान करके माध्य की गणना की जाती है उसे भारित सामान्तर माध्य या औसत कहते हैं। विभिन्न श्रेणियों में समान्तर माध्य अथवा समान्तर औसत के सूत्र निम्न प्रकार है-

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी

प्रत्यक्ष विधि : $a = \frac{\sum m}{n}$

लघु विधि :

खण्डित श्रेणी

प्रत्यक्ष विधि :

लघु विधि :

सतत श्रेणी

प्रत्यक्ष विधि : $a = \frac{\sum mf}{n}$

लघु विधि :

जहाँ - m = चरों के मूल्य अथवा माप
f = आवृत्ति अथवा बारंबारता
x = कल्पित माध्य
dx = कल्पित माध्य से विचलन
n = पदों की संख्या
c = समापवर्तक

1.3.1 सामान्तर माध्य की विशेषताएँ व सीमाएँ

सामान्तर माध्य की निम्नलिखित विशेषताएं हैं :-

(1) समान्तर माध्य की गणना बहुत आसान है एवं इसका निर्वचन सरल होता है।

(2) माध्य की गणना करने के लिए सभी पदों का प्रयोग किया जाता है। यदि पदों का योग एवं पदों की संख्या दी हुई हो तो माध्य की गणना की जा सकती है। बिना क्रमबद्ध श्रेणी में भी माध्य की गणना की जा सकती है।

(3) दो या दो से अधिक श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए एक अच्छा माध्यम है।

(4) यह उन्नत सांख्यकीय उपकरण के आधार रूप में कार्य करता है।

सामान्तर माध्य की निम्नलिखित सीमायें हैं :-

(1) बड़ी संख्याओं या असामान्य मूल्यों से माध्य काफी हद तक प्रभावित होता है। उदाहरणार्थ 3, 5, 7 एवं 285 का माध्य 75 है और यह श्रेणी का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता है

(2) माध्यिका एवं बहुलक की तरह माध्य श्रेणी में दृश्य नहीं होता है।

(3) कभी-कभी समान्तर माध्य भ्रमात्मक परिणाम देता है। दैनिक मजदूरी प्राप्त करने वाले एक मजदूर का उदाहरण लीजिये, उसकी औसत आय 80 रु0 है, यह एक अच्छी एवं उपयोगी सूचना है परन्तु यह उसके वास्तविक आय एवं कितने दिन के लिए उसे रोजगार मिला, इसका प्रतिनित्वि नहीं करता है।

उदाहरण 1

निम्नलिखित ऑकड़े 10 परिवारों की साप्ताहिक आय दिखाते हैं :

परिवार -	क	ख	ग	घ	ङ	च	छ	ज	झ	ञ
साप्ताहिक आय रु0 में	850,	700,	100,	750,	5000	80	420	2500	400	360

परिवारों की माध्य आय का आकलन करें।

कल्पित माध्य विधि द्वारा समांतर माध्य का विचलन

परिवार	**आय (X)**	**d = X-850 – X – A**	**d – (X–850)/10**
क	850	0	0
ख	700	− 150	−15
ग	100	−750	−75
घ	750	−100	−10
ङ	5000	+4150	+415
च	80	−770	−77
छ	420	−430	−43
ज	2500	+1650	+165
झ	400	−450	−45
ञ	360	−490	−49
	11160	+2660	+266

प्रत्यक्ष विधि :

$$a = \frac{\sum m}{n} = 11160/10 = 1116.00$$

कल्पित माध्य विधि द्वारा समान्तर माध्य :

$$a = x + \frac{\sum dx}{n} = 850 + 2660/10 = Rs.1116.00$$

उदाहरण 2

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए किसी गाँव में खेतिहर परिवारों की औसत जोतों का परिकल्पन करें।

जोत का आकार एकड़ में :

64 63 62 61 60 59

खेतिहर परिवारों की संख्या :

8 18 12 9 7 6

प्रत्यक्ष विधि द्वारा समांतर मान का अभिकलन

जोत का आकार (X) (एकड़ में) (1)	खेतिहर परिवारों की संख्या (2)	m (1x2) (3)	d (X–62) (4)	fd (2x4) (5)
64	8	512	+2	+16
63	18	1134	+1	+18
62	12	744	0	0
61	9	549	−1	−9
60	7	420	−2	−14
59	6	354	−3	−18
	60	3713	−3	−7

प्रत्यक्ष विधि : $a = \frac{\sum m}{n} = 3713/60 = 61.88$

कल्पित माध्य विधि द्वारा समान्तर माध्य :

$$a = x + \frac{\sum f(dx)}{n} = 62 + (-7)/60 = 62 - 0.11166 = 61.88$$

उदाहरण 3

निम्नलिखित छात्रों के औसत प्राप्तांकों का परिकलन प्रत्यक्ष विधि द्वारा विचलन विधि का प्रयोग करते हुए कीजिए।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
छात्रों की संख्या	5	12	15	25	8	3	2

प्रत्यक्ष विधि द्वारा अपवर्जी वर्ग अंतराल के लिए औसत प्राप्तांकों का अभिकलन

प्राप्तांक (x) (1)	छात्रों का संख्या (f) (2)	मध्य बिन्दु (m) (3)	fm (4)	$d = \frac{(m-35)}{10}$ (5)	fd (6)
0 – 10	5	5	25	–3	–15
10 – 20	12	15	180	–2	–24
20 - 30	15	25	375	-1	-15
30 – 40	25	35	875	0	0
40 – 50	8	45	360	1	8
50 – 60	3	55	165	2	6
60 – 70	2	65	130	3	6
	70		2110		–34

1. प्रत्येक वर्ग के लिए मध्यमान प्राप्त करें, जिसे 3 द्वारा दर्शाया जाता है। $2\Sigma fm$ निकालें और प्रत्यक्ष विधि सूत्रों का प्रयोग करें।

$$a = \frac{\sum mf}{n} = 2110/70 = 30.14$$

$$a = x + \frac{\sum f(dx)}{n} c = 35 + [(-34)/70]10 = 35 - 4.857 = 30.14$$

1.3.2 भारित समान्तर माध्य

साधारण सामान्तर माध्य की एक सीमा यह है कि सभी पदों को समान महत्व प्रदान करता है। भारित सामान्तर माध्य में, श्रेणी के पदों को उनके व्यक्तिगत गुणों के आधार पर भार दिया जाता है और तत्पश्चात् उनके माध्य की गणना की जाती है। विभिन्न पदों को उनके सापेक्ष महत्व के आधार पर भार प्रदान किया जाता है। भारित

समान्तर माध्य की गणना करने की आवश्यकता तब उत्पन्न होती है, जब विभिन्न पद एक ही जाति के होते हुए भी उनमें सम्पूर्ण सजातीयता नहीं होती है। भारित समान्तर माध्य की गणना करने के लिए सूत्र निम्न है -

$$a_w = \frac{\sum mw}{\sum w}$$

जहाँ m = माप

w = भार

भारित समान्तर माध्य के प्रयोग

भारित समान्तर माध्य निम्न परिस्थितियों में उपयोगी होता है-

1. जब किसी श्रेणी के विभिन्न पदों के सापेक्षिक महत्व अलग-अलग होते हैं। उदाहरणस्वरूप सूचकांकों के निर्माण में विभिन्न पदों के सापेक्षिक भिन्न-भिन्न होते हैं।
2. जब अनुपात, प्रतिशत अथवा दरों के औसत की गणना की जाती है, जैसे प्रमापीकृत मृत्यु अथवा जन्म दरों की गणना।
3. जब विभिन्न उपवर्गों के संयुक्त माध्य की गणना करनी हो। उदाहर्णाथ, एक कारखाने के कर्मचारियों के औसत आय की गणना जिसमें कुशल श्रमिक, अकुशल श्रमिक, पर्यवेक्षक आदि हों।

उदाहरण 4ःछात्रवृत्ति प्रदान करने के लिए परीक्षा ली गयी। विभिन्न विषयों को दिये गये भार एवं विद्यार्थी अ, ब, स के द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित सारणी में दिये गये हैं।

विषय	**भार**	**'अ' के प्राप्तांक**	**'ब' के प्राप्तांक**	**'स' के प्राप्तांक**
सांख्यिकी	4	63	60	65
गणित	3	65	64	70
अर्थशास्त्र	2	58	56	63
हिन्दी	1	70	80	52

'छात्रवृत्ति स को दिया जाना चाहिए ब को नहीं। भारित एवं समान्तर माध्य की गणना करते हुए उपरोक्त विवरण पर टिप्पणी कीजिए।

विषय	**भार**	**'अ'**		**'ब'**		**'स'**	
	(w)	(m)	(mw)	(w)	(mw)	(w)	(mw)
सांख्यिकी	4	63	252	60	240	65	260
गणित	3	65	195	64	192	70	210
अर्थशास्त्र	2	58	116	56	112	63	126
हिन्दी	1	70	70	80	80	52	52
	10	256	633	260	624	250	648

साधारण सामान्तर माध्य

$$a = \frac{\sum m}{n}:$$

'अ' : 256/4 = 64.0

'ब' : 260/4 = 65.0

'स' : 250/4 = 62.5

भारित सामान्तर माध्य :

$$a_w = \frac{\sum mw}{\sum w}:$$

'अ' : 633/10 = 63.3

'ब' : 624/10 = 62.4

'स' : 648/10 = 64.8

यद्यपि सरल सामान्तर माध्य के आधार पर 'ब' को सर्वाधिक अंक प्राप्त हुए हैं, किन्तु भारित सामान्तर माध्य के अनुसार 'स' के सर्वाधिक अंक हैं। क्योंकि हर विषय के साथ भार जुड़ा है, इसलिए छात्रवृत्ति 'स' को दिया जाना उचित होगा।

1.4 माध्यिका

माध्यिका आरोही अथवा अवरोही क्रम से सुसज्जित किसी श्रेणी में उस पद का मूल्य होता है जो कि श्रेणी के ठीक मध्य से स्थापित होता है। माध्यिका किसी श्रेणी को ठीक दो बराबर भागों में इस प्रकार विभाजित करती है कि उसके एक ओर के सभी चर उससे कम मूल्य तथा दूसरी ओर के सभी चर अधिक मूल्य के रहते हैं। दूसरे शब्दों में कहा जाय तो माध्यिका किसी श्रेणी का वह केन्द्रीय मूल्य है, जो श्रेणी को दो भागों में बाँटता है। प्रो. कानर के अनुसार, 'माध्यिका समंक श्रेणी का वह पद-मूल्य है जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार विभक्त करता है कि एक भाग में समस्त मूल्य माध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में समस्त मूल्य उससे कम हो। प्रो. सेक्रिस्ट के शब्दों में, ''माध्यिका किसी समंकमाला का अनुमानित या वास्तविक उस पद का मूल्य होता है जो कि इस वितरण को क्रमबद्ध किये जाने पर दो भागों में विभक्त करता है।''

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी में माध्यिका की गणना करने के लिए पदों को आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यसित किया जाता है। यदि पदों की संख्या विषम हो तो माध्यिका की गणना करने के लिए कुल पदों की संख्या में एक जोड़कर उसे दो से भाग दिया जाता है पदों की संख्या सम होने पर तकनीकी दृष्टि से माध्यिका विद्यमान नहीं होती है। ऐसी परिस्थिती में यह मान लिया जाता है कि यह दो पदों के बीच में होती है। इसलिए माध्यिका ज्ञात करने के लिए मध्य-पद (कुल पदों की संख्या दो भाग देने

पर पद) एवं अगले पद का औसत लिया जाता है। खण्डित श्रेणी में, पहले संचयी आवृत्ति ज्ञात किया जाता है। तत्पश्चात् कुल पदों की संख्या में एक जोड़कर उसे दो भागों में बाँट दिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह संख्या सम्मिलित होती है, उस संचयी आवृत्ति के सामने का मूल्य ही माध्यिका है।

सतत् श्रेणी में इसकी गणना थोड़ा कठिन होती है। सर्वप्रथम खण्डित श्रेणी में वर्णन किये गये विधि के अनुसार हमें उस वर्ग अन्तराल का पता लगाना पड़ता है जिसमें माध्यिका होती है। अन्तर केवल यह है कि इसमें कुल पदों की संख्या में दो से भाग दिया जाता है, और इसमें कुल संख्या में एक जोड़ा नहीं जाता। माध्यिका वाले वर्ग-अन्तराल का पता लग जाने पर, माध्य की गणना करने के लिए अन्तर्गणन के सूत्र का प्रयोग किया जाता है। माध्यिका ज्ञात करने के लिए, निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है :

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी

M = the size of (n+1)/2 th item

सतत श्रेणी

M = the size of (n+1)/2 th item

By interpotation

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(m-c)$$

जहाँ

n = पदों की संख्या

l_1 = माध्यिक वर्ग की निम्न सीमा

l_2 = माध्यिक वर्ग की उच्च सीमा

f_1 = माध्यिका वर्ग को आवृत्ति (बारंबारता)

m = मध्यिका पद

c = माध्यिका वर्ग की संचयी आवृत्ति (बारंबारता)

1.4.1 माध्यिका की विशेषताएं तथा सीमाएँ

माध्यिका के निम्नलिखित लाभ है।

1. माध्यिका कि गणना बहुत आसान है, विशेषकर व्यक्तिगत श्रेणी में तथा खण्डित श्रेणी में।
2. माध्यिका चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होती है।
3. माध्यिका एक स्थिति माध्य है, तथा पदों की स्थिति से प्रभावित होती है, न कि उनके मूल्यों तथा आकार से।

माध्यिका की निम्नलिखित सीमाएँ हैं

1. माध्यिका के निर्धारण हेतु श्रेणी को पुनः क्रमबद्ध करना पड़ता है।
2. माध्य की भाँति माध्यिका दो या दो से अधिक वर्णों के संयुक्त माध्यिका की गणना के लिए आधार रूप में प्रयुक्त नहीं की जा सकती है।
3. सतत् श्रेणी में माध्यिका की गणना एक कठिन कार्य है।
4. प्रतीदशाओं में अन्तर का प्रभाव माध्य कि अपेक्षा माध्यिका पर अधिक पड़ता है।
5. श्रेणी में पदों की संख्या कम होने पर माध्यिका श्रेणी का प्रतिनिधित्व करने वाली नहीं रह जाती है।

1.4.2 माध्यिका सिद्धान्त पर आधारित अन्य माप

कुछ ऐसे अन्य माप हैं कि जो माध्यिका के सिद्धान्त पर आधारित हैं। यह केन्द्रिय - प्रवृत्ति के माप नहीं है, परन्तु इनका अध्ययन इन मापों के अन्तर्गत किया जाता है। इन मापों में चतुर्थक, एक लोकप्रिय माप है जबकि पंचमक, अष्टमक का प्रयोग व्यवहार में बहुत ही कम किया जाता है। चतुर्थक, दशमक एवं शतमक ज्ञात करने के लिए, निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

प्रथम चतुर्थक : Q_1 = the size of (n+1)/4 th item

तृतीय चतुर्थक : Q_3 = the size of 3(n+1)/4 th item

प्रथम दशमक : D_1 = the size of (n+1)/10 th item

सातवाँ दशमक : D_7 = the size of 7 (n+1)/10 th item

प्रथम शतमक : P_1 = the size of (n+1)/100 th item

तिरपनवाँ शतमक : P_{53} = the size of 53(n+1)/100 th item

खण्डित श्रेणी

ऊपर उल्लिखित सूत्र ही यहाँ पर भी लागू होगा, अन्तर मात्र यह है कि n आवृत्तियों का योग दर्शायेंगे।

सतत श्रेणी

Q_1 = the size of (n+1)/4 th item and for interpolation

Q_1 = $Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q - c)$

Q_3 = the size of 3(n+1)/4 th item and for interpolation :

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - c)$$

D_3 = the size of (n+1)/10 th item and for interpolation :

$$D_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(d_1 - c)$$

P_1 = the size of (n+1)/100 th item and for interpolation :

$$P_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(p_1 - c)$$

उदाहरण 4

नीचे व्यक्तियों की संख्याएँ तथा उनकी आय (रु. में) का बारंबारता वितरण दिया गया है। माध्यिका आय की परिकल्पना कीजिए।

आय (रु में)	10	20	30	40
व्यक्तियों की संख्या :	2	4	10	4

माध्यिका आय को परिकलित करने के लिए,आप निम्नानुसार बारंबारता-वितरण तैयार कर सकते हैं।

आय (रु.में)	लोगों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता (cf)
10	2	2
20	4	6
30	10	16
40	4	20

मध्यिका = (n+1)/2 the item = 10.5 th term

प्रेक्षण, में अवस्थित है। इसे आसानी पूर्वक संचयी बारंबारता के माध्यम से ढूँढा जा सकता है। 10.5वाँ प्रेक्षण, 10वीं संचयी बारंबारता में निहित है। इससे संगत आय 30 रु. है। अतः मध्यिका आय 30 रू है।

उदाहरण 5

निम्नलिखित आँकड़े किसी कारखाने में कार्यरत लोगों की दैनिक मजदूरी से संबध है। मध्यिका दैनिक मजदूरी का अभिकलन कीजिए।

दैनिक मजदूरी :55-60 50-55 45-50 40-45 35-40 30-35 25-30 20-25

(रु.में)

मजदूरों की संख्याः 7 13 15 20 30 33 28 14

यहाँ पर आँकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित हैं।हमें दैनिक मजदूरी को भी आरोही क्रम प्रदान करना होगा।

उपर्युक्त में मध्यिका (N/2) में पद (अर्थात् 160/2) = शृंखला के 80वें मद का मान है, जो 35-40 वर्ग-अन्तराल में स्थित है।

सतत् शृंखला के लिए मध्यिका का अभिकलन

दैनिक मजदूरी (रु.में)	मजदूरों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता (f)
20-25	14	14
25-30	28	42
30-35	33	75
35-40	30	105
40-45	20	125
45-50	15	140
50-55	13	153
55-60	7	160

मध्यिका के सूत्रों का प्रयोग करने पर

$$M = \frac{l_1 + l_2 - l_1}{f_1}(m - c) = 35 + \frac{40-35}{30}(80-75) = 35.83$$

अतः मध्यिका दैनिक मजदूरी 35.83 रु. है। इसका अर्थ है कि 50 प्रतिशत मजदूर 35.83 रुपये से कम या इसके बराबर मजदूरी प्राप्त करते हैं और 50 प्रतिशथ मजदूर इससे अधिक या इसके बराबर मजदूरी प्राप्त करते हैं।

1.5 बहुलक

बहुलक को भुयिष्ठ के नाम से भी जाना जाता है। 'मोड शब्द फ़्रेंच भाषा का 'ला-मोड' शब्द से बना है। जिसका अर्थ है फ़ैशन या रिवाज। बहुलक किसी श्रेणी में वह मूल्य होता है जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक होती है तथा जो अधिकतम पुनरावृत्ति या घनत्व वाले बिन्दु पर स्थित हो। दूसरे शब्दों में श्रेणी में सबसे अधिक बार आने वाले पद के मूल्य को बहुलक कहा जाता है। सामान्यतः सबसे अधिक आवृत्ति वाले पद इसे अंग्रेजी में मोड (Mode) कहा जाता है के मूल्य को बहुलक कहते हैं, परन्तु ऐसा तभी हो सकता है जब उसे निकटवर्ती पदों का सहयोग मिल रहा हो अर्थात् आशय यह है कि यदि निकटवर्ती पदों की आवृत्ति कम है तो सर्वाधिक आवृत्ति वाला पद बहुलक होगा। इसके विपरीत यदि निकतवर्ती पदों की आवृत्तियाँ अधिक है तो उस पद को

बहुलक मजदूरी माना जा सकता है, भले ही जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक न हो क्योंकि निकटवर्ती आवृत्तियाँ उस पद को सहयोग अथवा सहारा प्रदान करती हैं। बहुलक मजदूरी अधिक श्रमिकों द्वारा अर्जित मजदूरी है न कि अधिकतम मजदूरी अथवा कोई अन्य मजदूरी। क्राक्सटन एवं काउड़न के शब्दों में किसी वितरण का बहुलक वह मूल्य है जिसके चारों ओर पद सर्वाधिक केन्द्रित हों। वह मूल्यों की श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिरूप माना जा सकता है। 'बार्डिंग्टन के अनुसार, 'बहुलक महत्वपूर्ण प्रकार या पद या आकार या सबसे अधिक घनत्व की स्थिति के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी में तकनीकी दृष्टिकोण से बहुलक नहीं होता है। व्यक्तिगत श्रेणी में यदि कोई पद का एक बार से अधिक बार आता है तो वह पद जो सबसे अधिक बार आता है उसे श्रेणी का बहुलक मान लिया जाता है। खण्डित श्रेणी में, दो-दो पदों को दो बार और तीन-तीन पदों को तीन बार कर आवृत्तियों का समूहन किया जाता है। तत्पश्चात् समूहित आवृत्तियों का विश्लेषण किया जाता है जिससे वह आवृत्ति मिलती है जिसमें सबसे अधिक पद होता है। सतत् श्रेणी में, पहले उपर वर्णित समूहन एवं विश्लेषण द्वारा बहुलक वर्ग-अन्तराल का पता लगाया जाता है और फिर निम्न सूत्र द्वारा बहुलक के आकार का अन्तर्गणन किया जाता है।

$$z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(l_2 - l_1)$$

l_1 = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

l_2 = बहुलक वर्ग की उच्च सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = बहुलक वर्ग से पहले के वर्ग की आवृत्ति

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद के वर्ग की आवृत्ति

1.5.1 बहुलक की विशेषताएँ तथा सीमाएँ

बहुलक की निम्नलिखित सीमाएँ हैं -

1. व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी में बहुलक का निर्धारण नहीं किया जा सकता। खण्डित एवं सतत् श्रेणी में भी बहुलक कई स्थितियों में अनिर्धारणीय रहता है।
2. बहुलक मूल्य श्रेणी के अन्य मूल्यों की उपेक्षा करता है।
3. बहुलक एक एकांकी मूल्य है और इसलिए बहुलक एवं कुल पदों की संख्या मालूम होने पर कुल मापन नहीं मालूम किया जा सकता है।

1.5.2 माध्य, माध्यिका बहुलक सम्बन्ध

यह सम्बन्ध माध्य, माध्यिका एवं बहुलक के मध्य आवृत्ति बंटन की प्रकृति पर निर्भर करता है। जो सममित (Symmetrical) अथवा असममित (Asymmetrical) होता

है। सममित वितरण में माध्य, माध्यिका एवं बहुलक का मूल्य समान होता है। इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता हैः

$$a = M = Z$$

जब श्रेणी में सममित वितरण नहीं होता है तो इसे विषम (skewed) श्रेणी के नाम से जाना जाता है। विषम श्रेणी में अति असममित अथवा अल्प-असममित वितरण होता है। जब श्रेणी में अति असममित वितरण होता है तो किसी प्रकार के सम्बन्ध का पूर्वानुमान नहीं किया जा सकता है। अल्प-असममित वितरण श्रेणी में, माध्य एवं माध्यिका के मध्य अन्तर, माध्य एवं बहुलक के मध्य अन्तर का एक तिहाई होता है। इसे निम्न प्रकार व्यक्ति किया जा सकता है।

$$a - M = 1/3(a\text{-}Z)$$

इसलिये, अल्प-असमित वितरण श्रेणी में, तीनों मूल्य (माध्य, माध्यिका एवं बहुलक) में से किन्ही दो मूल्य ज्ञात होने पर हम तीसरे के मूल्य ज्ञात कर सकते हैं। तकनीकी दृष्टि से बहुलक अनिर्धारण होने पर हम इस संबंध का प्रयोग करके बहुलक का निर्धारण कर सकते हैं। ऐसी परिस्थितियों में बहुलक की गणना करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$Z = 3M - 2a$$

उदाहरण -6

निम्न श्रेणी का बहुलक ज्ञात कीजिए

पद	:	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
बारंबारता	:	1	2	10	4	10	9	2

Grouping – Table

पद	बारंबारता					
0-5	1	3		13		
5-10	2		12		16	
10-15	10	14				24
15-20	4		14	23		
20-25	10	19			21	
25-30	9		11			
30-35	2					

Analysis– Table

पद / column	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
1			1		1		
2					1	1	
3				1	1		
4				1	1	1	
5					1	1	1
6			1	1	1		
Total			2	3	6	3	1

$$z = l_1 + \frac{f_1 = f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(l_2 - l_1)$$

20 = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

25 = बहुलक वर्ग की उच्च सीमा

10 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

4 = बहुलक वर्ग से पहले के वर्ग की आवृत्ति

9 = बहुलक वर्ग के बाद के वर्ग की आवृत्ति

उदाहरण 7

एक सामान्य रूप में असममित बंटन में माध्य एवं बहुलक का मूल्य क्रमशः 15 वं 18 हैं। माध्यिका का मूल्य ज्ञात कीजिये।

a - M = 1/3 (a-z)

15-M = 1/3 (15-18)

Or (15 x 3) -3M = 15-18

Or –3M = 15-18-45

Or –3M = 15-63

Or 3M = 48

M = 48/3 = 16

बोधात्मक प्रश्न (ख)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. सामान्तर माध्य का एक लाभ है :

 a. यह बड़े मूल्यों को अधिक महत्व एवं छोटे मूल्यों को कम महत्व देता है।

b. इसे केवल निरीक्षण द्वारा ज्ञात नही किया जा सकता है।

c. यह अनिश्चित नहीं है।

d. इनमें से कोई नहीं है।

2. बहुलक है :

a. सर्वाधिक पुनरावृत्ति होने वाले चर का मूल्य

b. चरम मूल्यों द्वारा प्रभावित

c. सभी निरीक्षणों पर आधारित

d. केवल निरीक्षण द्वारा ज्ञातव्य

1.6 गुणोत्तर-माध्य

गुणोत्तर माध्य किसी श्रेणी के सभी पदों के गुणनफल का वह आधार मूल (root$\sqrt{}$) है जितनी उस श्रेणी की संख्यायें होती है। दूसरे शब्दों में न (n) वस्तुओं का गुणोत्तर माध्य उन वस्तुओं के गुणनफल का न (n)वाँ है। उदाहरण के लिए दो अंकों का गुणोत्तर माध्य उनका घनमूल तथा चार अंकों का गुणोत्तर ढ्हय उनका चतुर्थमूल होगा। प्रतीकात्मक रूप में :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times ......n}$$

मान लीजिए कि हमें एक परीक्षा में तीन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किये हुए अंकों का गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना है और उनके प्राप्तांक 1,2 एवं 4 इसका गुणोत्तर माध्य होगा।

$$G = \sqrt[3]{1 \times 2 \times 4}$$
$$= \sqrt[3]{8} = 2\, Marks$$

परन्तु व्यवहार में इस प्रकार के गुणोत्तर माध्य करने के अवसर बहुत सीमित होते हैं क्योंकि गुणा करने तथा मूल निकालने की गणीतीय प्रक्रिया बहुत ही कठिन होती है। इसलिये इसकी गणना करने के लिए लघुगणकीय तालिकाओं (Logarithmic Tables) की सहायता ली जाती है। व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी में सबसे पहले पदों का लघुगणक (Log) लिया जाता है और फिर उन्हें जोड़कर लघुगणक योग प्राप्त किया जाता है। फ़िर इस योग को पदों की संख्या से भाग देकर लघुगणकों का औसत ज्ञात किया जाता है। इस औसत का प्रति-लघुगुणक (anti-log) ज्ञात कर गुणोत्तर माध्य प्राप्त किया जाता है। खण्डित श्रेणी एवं सतत् श्रेणी में व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी की तुलना में अन्तर केवल यह है कि इनमें पदों के लघुगणकों को उनके आवृत्तियों से गुणा किया जाता है। विभिन्न श्रेणियों में गुणोत्तर माध्य के सूत्र निम्नलिखित है :

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी

$$G = Anti\, log\left(\frac{\sum log}{n}\right)$$

खण्डित श्रेणी एवं सतत् श्रेणी

$$G = Anti\, log\left(\frac{\sum log \times f}{n}\right)$$

1.6.1 गुणोत्तर-माध्य की विशेषताएँ तथा सीमाएँ

गुणोत्तर माध्य के निम्नलिखित लाभ हैं -

1. गुणोत्तर माध्य निश्चित परिणाम देता है क्योंकि यह स्पष्टतः परिभाषित होता है।
2. गुणोत्तर माध्य सभी मूल्यों को प्रयोग में लाता है इसलिए यह उच्चस्तरीय गणितीय शुद्धता के सर्वथा उपयुक्त है।

गुणोत्तर माध्य के निम्नलिखित सीमाएँ हैं :

1. इसकी गणना करना कठिन है और केवल विशेषज्ञ ही इसकी गणना कर सकते हैं।
2. जब कोई पद शून्य अथवा ऋणात्मक होता है तो गुणोत्तर माध्य अगणनीय अथवा काल्पनिक हो जाता है।

उदाहरण - 7

निम्नलिखित संख्याओं का गुणोत्तर माध्य लिखिए।

8,40,175,1208,2000

संख्या	लघुगणक
8	0.9031
40	1.6021
175	2,2430
1209	3.0824
2000	3.3010
	11.1316

$$G = Anti\, log\left(\frac{\sum log}{n}\right)$$

– AL (11.1316/5) = AL 2.2263 = 168.4

1.7 हरात्मक-माध्य

हरात्मक माध्य श्रेणी के पदों की संख्या से उनके प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम (reciprocal) के योग को विभाजित करने पर प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में किसी श्रेणी के व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य के प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम को हरात्मक माध्य कहते हैं। किसी भी संख्या से एक को भाग देकर प्राप्त मूल्य को प्रतिलोम अथवा व्युत्क्रम कहते हैं। इसकी गणना में व्युत्क्रम सारणी की सहायता लेनी पड़ती है। यदि श्रेणी के किसी पद का मूल्य शून्य अथवा ऋणात्मक है तो उसका हरात्मक माध्य त्रुटिपूर्ण समझा जाता है। हरात्मक माध्य का प्रयोग उन परिस्थितियों में किया जाता है जब घटक स्थिर (constant) रहता है और अन्य घटकों के लिए औसत दर की गणना करनी हो। उदाहरणस्वरूप, कृषि में प्रति इकाई लागत की गणना करनी हो तो कुल लागत स्थिर घटक होता है। विभिन्न श्रेणीयों में हरात्मक माध्य का सूत्र निम्नलिखित है :

व्यक्तिगत अवलोकनों की श्रेणी

$$H = Reciprcal\left(\frac{\sum Reciprocal}{n}\right)$$

खण्डित श्रेणी एवं सतत् श्रेणी

$$H = Reciprcal\left(\frac{\sum Reciprocal \times f}{n}\right)$$

व्युतक्रम सारणी के अवलोकन की प्रक्रिया लघुगणक सारणी के अवलोकन प्रक्रिया के लगभग समान ही होती है। अन्तर यह है कि व्युत्क्रम सारणी में हम पहले व्युत्क्रम ज्ञात करते हैं और फिर एक सामान्य नियम के प्रयोग द्वारा उसमें दशमलव बिन्दु लगाया जाता है। नियम यह है कि यदि दिये हुए संख्या में दशमलव बिन्दु एक अंक दाहिने की ओर जाता है, व्युत्क्रम में दशमलव बिन्दु एक अंक बांये की ओर जाता है अथवा इसके विपरीत। एक अन्तर यह है कि इसमें माध्य स्तम्भ (Mean Difference Column) में आने वाले अंकों को घटाया जाता है न की जोड़ा जाता है।

1.7.1 हरात्मक माध्य की विशेषताएँ

हरात्मक माध्य की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं :

1. हरात्मक-माध्य की एक व्यापक तकनीक है और यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होती है।
2. दर, गति एवं अनुपाताम की गणना करने के लिए हरात्मक-माध्य का प्रयोग किया जाता है

1.7.2 हरात्मक माध्य की सीमाएँ

हरात्मक माध्य की निम्नलिखित सीमायें है :

1. हरात्मक माध्य की गणना कठिन है एवं यह आसानी से समझ में भी नहीं आती है, इसलिए यह कम लोकप्रिय है।
2. यह आवश्यक नहीं है कि हरात्मक माध्य श्रेणी का एक वास्तविक पद ही हो। अतः यह श्रेणी का प्रतिनिधित्व करने वाला माध्य नहीं होता।
3. जब श्रेणी का कोई पद शून्य अथवा ऋणात्मक होता है तो हरात्मक माध्य की गणना नहीं की जा सकती।

उदाहरण - 8

निम्नलिखित संख्याओं का हरात्मक माध्य निकालिए

6,10,15,20

संख्या	व्युत्क्रम
6	0.16670
10	0.10000
15	0.06667
20	0.05000
	0.38337

$$H = \text{Re}ciprcal\left(\frac{\sum \text{Re}ciprocal}{n}\right) = \text{Re}ciprocal\left(\frac{0.38337}{4}\right)$$

$$= \text{Re}c.\, 0.09584 = 10.44$$

1.7.2 हरात्मक माध्य, गुणोत्तर-माध्य, सामान्तर माध्य में सम्बन्ध

यदि श्रेणी में सब पद समान हो तो यह तीनों मापें बराबर होती हैं अर्थात् परन्तु यदि पद अलग-अलग हों तो समान्तर माध्य गुणोत्तर-माध्य से अधिक और गुणोत्तर-माध्य हरात्मक-माध्य से अधिक होता है। इसका कारण है इनके भार देने की निहित पद्धति। समान्तर माध्य सभी पदों को समान भार देता है, गुणोत्तर माध्य छोटे पदों को अधिक और बड़े पदों को कम भार देता है, जबकि हरात्मक माध्य न्यूनतम पद को अधिकतम एवं अधिकतम पद को न्यूनतम भार देता है। सूत्र के रूप में इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$a \geq G \geq H$$

इन तीनों माध्यों में एक और भी सम्बन्ध होता है। गुणोत्तर-माध्य, समान्तर माध्य एवं हरात्मक-माध्य के गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होता है। सूत्र के रूप में इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है। :

$$G = \sqrt[a]{a \times H}$$

1.8 सारांश

उपरोक्त पंक्तियों में विभिन्न माध्यों की तकनीक, उनकी विशेषताओं एवं सीमाओं का विस्तार से वर्णन किया गया है परन्तु उस आधार पर यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है कि कौन सा माध्य सर्वोत्तम है। यदि सर्वाधिक मध्य मूल्य ज्ञात करना हो तो मध्यिका उपयुक्त होगा। यदि सर्वाधिक प्रयोग में आने वाला आकार ज्ञात करना हो तो बहुलक सबसे अधिक उपयुक्त होगा। इस प्रकार जब अनुपात ज्ञात करनी हो तो गुणोत्तर-माध्य उपयुक्त होगा और गति अथवा दरों के माध्य की गणना करने के लिए हरात्मक माध्य की गणना की जाती है।

इकाई 2 : विषमता, परिघात एवं पृथुशीर्षत्व के माप

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् पाठक जान सकेंगे की :

1. श्रेणी का स्वरूप व चरित्र कैसा है, उसका प्रसार सममित है अथवा असममित।
2. विषमता से क्या हैं तथा, अपीकरण एवं विषमता में अन्तर क्या हैं, एवं विषमता कितने प्रकार की होती है।
3. विषमता का परीक्षण तथा माप।
4. परिघात की परिभाषा, एवं माप।
5. पृथुशीर्षत्व की परिभाषा, एवं माप।

2.1 प्रस्तावना

पूर्ववर्ती इकाई से यह स्पष्ट हो चुका है कि कोई अकेला संख्यिकीय मापन किसी श्रेणी की सभी विषेशताओं को प्रकट करने में सक्षम नहीं होता है। माध्य से हमें केन्द्रीय प्रवृत्ति का तथा अपिकरण (dispersion) से केन्द्रीय प्रवृत्ति के विचलन का ज्ञान प्राप्त होता है। श्रेणी का स्वरूप व चरित्र कैसा है, उसका प्रसार सममित है अथवा असममित, इसका ज्ञान केवल विषमता एवं पृथुशीर्षत्व रूपायन द्वारा ही सम्भव है। विषमता हमें वक्र

की आकृति का विश्लेषण करने में सहायता प्रदान करता है - अर्थात संमित्तीयता एवं असमित्तीयता, जबकि पृथुशीर्षत्व वक्र के चपटेपन की ओर संकेत करता है। यह चार माप अर्थात केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपिकिरण, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व किसी आवृत्ति वितरण का पूर्णरूपेण निरूपण करने में पर्याप्त रूप से सक्षम है।

2.2 विषमता का अर्थ

विषमता का अर्थ है श्रेणी में सममिता का अभाव होना। यदि किसी श्रेणी में सम्पूर्ण वितरण सममित है तो श्रेणी को अविषम श्रेणी कहा जाता है। यदि किसी अविषम श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो एक स्पष्ट घंटी के आकार का वक्र प्राप्त होगा। विषम श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने से असंतुलित वक्र प्राप्त होगा। संक्षेप में यदि परिभाषित किया जाय तो सिम्पसन एवं काफ़्का की परिभाषा उद्धत की जा सकती है- ''विषमता आवृत्ति वितरण की विशेषता है जो वर्ग के एक ओर अधिकतम आवृत्ति के साथ दूसरी ओर की अपेक्षा अधिक चढ़ जाती है''। पैडन तथा लिण्डक्रिस्ट के शब्दों में, ''एक वितरण को विषम कहा जाता है यदि उसमें संममिति का अभाव होता है, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं।

2.2.1 अपिकरण एवं विषमता में अन्तर

अपिकरण किसी श्रेणी में पदों के बिखराव को प्रदर्शित करता है, जबकि विषमता का सम्बन्ध उसकी आकृति की विशिष्टताओं से होता है। अन्य शब्दों में अपिकरण हमें श्रेणी की संरचना के बारे में बताता है जबकि विषमता हमें वक्र की आकृति के बारे में बताता है। अपिकरण हमें श्रेणी के पदों का मानक रूप में स्वीकृत अन्य किसी पद के व्यक्तिगत अन्तरों की ओर संकेत करता है। विषमता विचलनों की दिशा की ओर संकेत करता है। अपिकरण द्वितीय श्रेणी के माध्यओं पर आधारत है।

2.2.2 वितरण के प्रकार

विषमता के दृष्टिकोण से आकृति वितरण को निम्न दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है:

1) **अविषम, सामान्य अथवा सममित वितरण** (Askewed Normal Symmetrical Distribution): इस प्रकार के आवृत्ती वितरण के मूल्यों की आवृत्तीयाँ एक निश्चित बिन्दु या स्थान पर चरम अथवा अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम में घटती हैं। ऐसे आवृत्ति को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर घंटी के आकार का वक्र प्राप्त होता है। मध्य से विभाजित करने पर वक्र के दोनों भाग संपूर्ण समान होंगे।

विभाजित करने पर वक्र के दोनों भाग संपूर्ण समान होंगे।

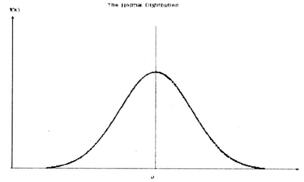


Fig 1: सममित वितरण (a=Z=M)

2) **विषम अथवा असममित वितरण** (Skewed or Asymmertrical Distribution) : विषम अथवा असममित वितरण में आवृत्तियों के घटने व बढ़ने का कोई निश्चित क्रम नहीं होता है। ऐसे वितरणमाला में सामान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक एक नहीं होते हैं। ऐसे वितरण को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर असामान्य तथा झुकावदार वक्र प्राप्त होता है। ऐसे वितरण में पायी जाने वाली विषमता दो प्रकार की होती है।

a. धनात्मक विषमता - धनात्मक विषमता तब पाई जाती है जब किसी श्रेणी का समान्तर माध्य, माध्यिका से तथा माध्यिका बहुलक से अधिक होती है। इस स्थिति में वक्र दहिनी ओर झुका होता है।

b. ऋणात्मक विषमता - ऋणात्मक विषमता तब पाई जाती है जब किसी श्रेणी का समान्तर माध्य, माध्यिका से तथा माध्यिका बहुलक से कम होता है। इस स्थिति में वक्र बांये ओर झुका होता है।

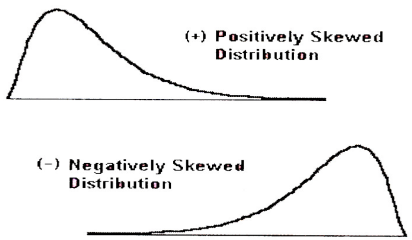


Fig 2: धनात्मक एवं ऋणात्मक विषमता विषमता

2.2.3 विषमता का परीक्षण

यह जानने के लिए विषम है अथवा अविषम, निम्न बिन्दुओं पर विचार करना होगा :

1. यदि किसी श्रेणी में समांतर माध्य का तथा बहुलक का मूल्य समान है तो श्रेणी में विषमता नहीं होगी।
2. यदि माध्यिका से लिए गये धनात्मक विचलनों का योग ऋणात्मक

विचलन के बराबर है तो विषमता नहीं होगी।

3. यदि चतुर्थ-दशमक के जोड़े माध्यिका से बराबर दूरी पर स्थित है तो विषमता नहीं होगी।
4. यदि बहुलक के आगे व पीछे समान दूरी पर दोनों ओर की बारंबारतायें बराबर हो तो विषमता नहीं होगी।
5. यदि श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर सममित वक्र उभरे तथा घटी के आकार का हो तो विषमता नहीं होगी।

2.2.4 विषमता के माप

विषमता के माप विषमता के परीक्षण पर आधारित है। उपर वर्णित प्रथम एवं तृतीय विषमता के परीक्षणों का प्रयोग इसके माप के लिए किया जाता है। विषमता के मापों का वर्णन नीचे किया गया है।

विषमता का प्रथम माप : विषमता का प्रथम माप, विषमता के प्रथम परीक्षण पर आधारित है। विषमता का परीक्षण यह है कि एक सममितीय वितरण में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक का मूल्य समान होता है। अतः श्रेणी की विषमता माध्यों के अन्तर पर निर्भर करती है। जितना अन्तर अधिक होगा उतनी ही विषमता पाई जायेगी। इसके सापेक्षिक माप प्राप्त करने के लिए विषमता गुणांक ज्ञात किया जाता है। विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए केन्द्रिय प्रवृत्ति के मापों के अन्तर को किसी अपिकरण के माप से भाग दिया जाता है। इस संदर्भ में कार्ल-पीयर्सन का वीषमता माप सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है। बहुधा यह कार्ल-पीयर्सन का विषमता गुणांक ही के नाम से जाना जाता है। विषमता के प्रथम माप के निम्न सूत्र हैः

i. विषमता = a–M विषमता गुणांक = (a–M)/δ,
{a : Mean, M:Median, mean deviation}

ii. विषमता = a–Z विषमता गुणांक = (a–Z)/ $_z$,
{a : Mean, Z:Mode, $_z$ modal deviation}

iii. कार्ल-पीयर्सन का विषमता माप J = (a–Z)/ ,
{a : Mean, Z:Mode, : standard deviation}

iv. कार्ल-पीयर्सन का विषमता माप (जब बहुलक ज्ञात न हो) J =3 (a–M)/ ,
{a : Mean, M:Median, : standard deviation}

विषमता का द्वितीय माप : विषमता का द्वितीय माप विषमता के तृतीय परीक्षण पर आधारित है। विषमता का परीक्षण यह है कि सममितीय वितरणों के चतुर्थकों की जोड़ी (अर्थात् Q_1 एवं Q_3) मध्यिका से समान दूरी पर होगी। अतः श्रेणी में विषमता की मात्रा, दो चतुर्थकों के अन्तर से भाग दिया जाता है।

प्रो0 वाउले ने चतुर्थकों पर आधारित विषमता के सूत्र का प्रतिपादन किया था। इसी कारण से उसे वाउले का विषमता गुणांक भी कहते हैं। विषमता के द्वितीय माप के निम्न सूत्र है :

i. वाउले का विषमता : $Q = Q_1 + Q_3 - 2M$

ii. वाउले का विषमता गुणांक = $Q = (Q_1+Q_3-2M)/Q_3-Q_1$

विषमता का तृतीय माप : विषमता का तृतीय माप घनमूल तथा घनों की सहायता से निकाला जाता है। यहाँ पर तृतीय घात को आधार मानकर मानक विचलन से विभाजित किया जाता है। इसका प्रयोग व्यावहारिक रूप से न्यून है। विषमता के तृतीय माप के निम्न सूत्र हैं :

$$SK_3 = 3\sqrt{\frac{\sum d^3}{n}}$$

d = deviation, n = no. of observations

विषमता का गुणांक = $SK_3 = 3\sqrt{\frac{\sum d^3}{n}} + \sigma,$

d = deviation, n = no. of observations σ = standard deviation

व्यक्तिगत अवलोकनों तथा खण्डित श्रेणी

$$SK_3 = 3\sqrt{\frac{\sum fd^3}{n}}, d = deviation, f = \text{बारंबारता}$$

विषमता गुणांक = coeff $SK_3 = 3\sqrt{\frac{\sum fd^3}{n}} + \sigma,$

d = deviation, f = बारंबारता σ = standard deviation

उदाहरण 1

एक कक्षा के वर्ग 'अ' और 'ब' के 120 विद्यार्थीयों के प्राप्तांकों से निम्न माप प्राप्त होता है :

	समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन	बहुलक
वर्ग अ	42.32	15	47.28
वर्ग ब	58.37	15	57.62

निर्धारित कीजिए कि कौन का अंक बंट्न अधिक असममितीय है।

$$J = (a-z)/\sigma$$

वर्ग अ

J = (42.32 – 47.28)/15 = – 0.33

वर्ग ब

J = (58.37 – 57.62)/15 = + 0.05

वर्ग 'अ' के छात्रों के अंक बंटन ऋणात्मक विषमता दर्शाते हैं तथा वर्ग 'ब' के छात्रों के अंक धनात्मक विषमता दिखाते हैं। वर्ग 'अ' के अंक 'ब' की तुलना में अधिक विषमता दर्शाते हैं। अतः वर्ग 'अ' अधिक असममित है।

2.3 परिघात

परिघात को आघूर्ण के नाम से भी जाना जाता है। फ्रेडरिक मिल्स के अनुसार 'परिघात एक प्रचलित यान्त्रिक शब्द घूर्णन (rotation) उत्पन्न करने वाली प्रवृत्ति से सम्बन्धित किसी बल का एक माप है। इस प्रवृत्ति की शक्ति स्पष्टतया, बल की मात्रा और मूल बिन्दु से उस बिन्दु तक की दूरी जहाँ बल लगाया जाता है, पर निर्भर करती है।' सांख्यिकी में वर्ग-आवृत्तियों को बल एवं विभिन्न मूल्यों का माध्य से विचलनों के घातों के समान्तर माध्य को परिघात कहा जाता है। किसी श्रेणी में उसके माध्य से निकाले गये परिघात अथवा माध्य से परिघात (Moments about a mean) कहा जाता है और सांख्यिकी में अधिकतर केन्द्रीय परिघातों का ही प्रयोग किया जाता है। इन परिघातों के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर 'μ' (उच्चारण म्यू) का प्रयोग किया जाता है। माध्य से विभिन्न परिघातों की गणना करने के सूत्र निम्न प्रकार है :

$$\mu_2 = \sum \frac{d}{n} \quad or \quad \sum \frac{fd}{n}$$

प्रथम परिघात : $\mu_1 = \sum \frac{d}{n} \quad or \quad \sum \frac{fd}{n}$

द्वितीय परिघात :

तृतीय परिघात : $\mu_3 = \sum \frac{d^3}{n} \quad or \quad \sum \frac{fd^3}{n}$

चतुर्थ् परिघात : $\mu_4 = \sum \frac{d^4}{n} \quad or \quad \sum \frac{fd^4}{n}$

यदि विचलनों की (द) के मूल्य की गणना कल्पित माध्य (d) से किया जाय तो विभिन्न के मूल्यों को निकालने के पूर्व कुछ समायोजन करने पड़ते हैं। जब परिघात की गणना करने के लिए कल्पित माध्य का प्रयोग किया जाता है तो उन्हें स्वेछ मूल बिन्दु से परिघात कहा जाता है (moment about aribtary origin)। ऐसे परिघातों के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर 'ν' (उच्चारण न्यू) का प्रयोग किया जाता है। स्वेछ मूल बिन्दु से माध्य से परिघात की गणना करने के लिए निम्न समायोजन करने पड़ते हैं।

$$\mu_1 = \nu_1 - \nu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \sigma^2$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\,\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\,\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\,\nu_2 - 3\nu_1^4$$

परिघातों की गणना वितरण की रचना की प्रकृति का अध्ययन करने के लिए किया जाता है। वे हमें इस बारे में बताते हैं कि वितरण सममित है अथवा नहीं। वे हमें यह भी बताते हैं कि सममित वक्र सामान्य है, सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक सपाट है अथवा सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक शिखर या तुंग (peaked) है।

उदाहरण 2

निम्न आंकड़ों के प्रथम चर परिघातों की गणना कीजिए :

अनुक्रमांक :	1	2	3	4	5
अंक :	5	7	8	1	15

अनुक्रमांक	अंक (m)	d = (m-a)	d^2	d^3	d^4
1	5	−4	16	−64	256
2	7	−2	4	−8	16
3	8	−1	1	−1	1
4	10	1	1	1	1
5	15	6	36	216	1296
कुल योग	45	0	58	155	1570

a = m/n = 45/5 = 9

$$\mu_1 = \sum \frac{d}{n} = 0/5 = 0$$
$$\mu_2 = \sum \frac{d^2}{n} = 58/5 = 11.6$$
$$\mu_3 = \sum \frac{d^3}{n} = 144/5 = 28.8$$
$$\mu_4 = \sum \frac{d^4}{n} = 1570/5 = 314$$

2.4 पृथुशीर्षत्व (Kurtosis)

पृथुशीर्षत्व को ककुदता के नाम से भी जाना जाता है। पृथुशीर्षत्व भी एक अन्य

माप है जो हमें वितरण के स्वरूप के बारे में जानकारी देता है। पृथुशीर्षत्व का प्रयोग वक्र के शीर्ष की प्रकृति (peakedness) अथवा कूबड़पन (humpedness) का वर्णन करने के लिए किया जाता है। ग्रीक भाषा में 'Kurtosis' शब्द का अर्थ 'फुलावट' (bulginess) से है। सांख्यिकी में यह सामान्य वितरण से अधिक सपाट (flat topped) अथवा अधिक शिखर या तुंग वितरण की और संकेत करता है। सिम्पसन और काफ़्फा के अनुसार एक वितरण की पृथुशीर्षत्व की मात्रा का मापन सामान्य वक्र की शिखरता से सम्बन्धित किया जाता है। 'क्राक्सटन और काउडेन के शब्दों में, 'पृथुशीर्षत्व का माप उस मात्रा को व्यक्त करता है जिसमें आवृत्ति वितरण का वक्र तुंग अथवा सपाट होता है। 'क्लार्क एवं शकाडे ने कहा 'पृथीशीर्षत्व किसी वितरण की वह विशिष्टता है जो कि उसकी सापेक्ष शीर्षकीय प्रकृति को प्रकट करती है।

1905 में कार्ल पियर्सन ने **'मीजोक्यूरेटिक', लेपटोक्युरेटिक'** तथा **'प्लेटीक्यूरेटिक'** शब्दों का प्रयोग किया था। सामान्य वितरण को मध्य ककुदी **(मीज़ोक्युरेटिक)** के नाम से जाना जाता है। यदि कोई वितरण सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक शिखर या तुंग हो तो उसे कूट ककुदी **(लेप्टोक्युरेटिक)** कहते हैं। यदि कोई वितरण सामान्य वक्र की अपेक्षा अधिक सपाट हो तो उसे कूट ककुदी **(प्लेटोक्युरेटिक)** कहते हैं। यह तीनों प्रकार के वक्रों को नीचे दिखाया गया है।

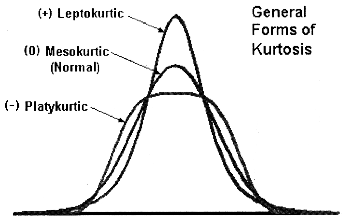


Fig 3: मीज़ोक्युरेटिक', 'लेपटोक्युरेटिक' तथा 'प्लेटीक्युरेटिक' पृथुशीर्षत्व

2.4.1 पृथुशीर्षत्व के माप (Measures of Kurtosis)

चतुर्थ परिघात एवं द्वितीय परिघात, पृथुशीर्षत्व के मूल्य की गणना करने का आधार होता है। पृथुशीर्षत्व के मापन हेतु कार्ल पीयर्सन ने निम्न सूत्र दिया है।

पृथुशीर्षत्व का माप अथवा β_2 (बीटा-दो) अथवा α_4 (अल्फा-चार)

$$= \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}}$$

$$= \frac{\text{चतुर्थ परिघात}}{(\text{द्वितीय परिघात})}$$

एक सामान्य वितरण में के बराबर होता है। यदि यह 3 से अधिक हो तो वक्र अधिक तुंग होगा अर्थात् कूट ककुदी (लेप्टोक्यूर्टीक) और यदि यह 3 से कम हो तो वक्र अधिक सपाट होगा अर्थात् चर्पट ककूदी **(प्लेटीक्यूरेटिक)** की स्थिति होगी।

पृथुशीर्षत्व के माप को γ_2 (ग्रीक अक्षर गामा-दो) से भी व्यक्त किया जाता है। उपरोक्त सम्पूर्ण स्थिति का संक्षिप्तीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है।

γ_2 Or $\beta_2 -3 = 0$ वक्र मध्य ककुदी **(मीज़ोक्यूरेटिक)** होगा।

γ_2 धनात्मक है, वक्र कूट ककुदी **(लेप्टोक्यूरेटिक)** होगा।

γ_2 ऋणात्मक है, वक्र चर्पट ककूदी **(प्लेटीक्यूरेटिक)** होगा।

उदाहरण 3

निम्न आंकड़ो के पृथुशीर्षत्व के माप की गणना कीजिए :

मासिक आय (000 रू.में)	20-55	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
व्यक्तियों की संख्या	6	8	11	14	21	15	11	9	5

मासिक आय ('000रु में) m	व्यक्तियों की संख्या f	मध्य-मा m'	(x=42.5) विचलन (dx)	i=5 dx/i	fdx/i	dx/i²	fdx/i³	fdx/i4
20-25	6	22.5	–20	–4	–24	96	–384	1536
25-30	8	27.5	–15	–3	–24	72	–216	648
30-35	11	32.5	–10	–2	–22	44	–88	176
35-40	14	37.5	–5	–1	–14	14	–14	14
40-45	21	42.5	0	0	0	0	0	0
45-50	15	47.5	5	–1	–15	15	–15	15
50-55	11	52.5	10	2	22	88	88	176
55-60	9	57.5	15	3	27	243	243	729
60-65	5	62.5	20	4	20	320	320	1280
कुल योग	100				0	446	-36	4574

$$\nu_1 = \sum fd / n = 0/100 = 0$$

$$\nu_2 = \sum fd^2 / n = 446/100 = 4.46$$

$$\nu_3 = \sum fd^3 / n = -36/100 = -0.36$$

$$\nu_4 = \sum fd^4 / n = 457/100 = 45.74$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1{}^2 = 4.46 - 0^2$$

$$\mu_4 = \nu_{4-4}\ \nu_1\nu_3 + 6\nu_1{}^2\ \nu_{2-3}\nu_1{}^4$$

$$= 45.74 - 4(0)\,(-.36) + 6(0)^2(4.46) - 3\,(0)^4 = 45.74$$

$$\beta_2 = \mu_4 / \mu_2{}^2 = 45.74 / (4.46)^2 = 2.3$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 2.3 - 3 = -0.7$$

क्योंकि γ_2 ऋणात्मक है तथा β_2 3 से कम है इसलिए वक्र चर्पट ककूदी होगा।

2.5 सारांश

श्रेणी का स्वरूप व चरित्र कैसा है, उसका प्रचार सममित है अथवा असममित, इसका ज्ञान केवल विषमता एवं पृथुशीर्षत्व के मापन द्वारा ही सम्भव है। विषमता हमें वक्र की आकृति का विश्लेषण करने में सहायता प्रदान करता है, जबकि पृथुशीर्षस्थ वक्र के चपटापन की ओर संकेत करता है। यदि किसी अविषम श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो एक स्पष्ट घंटी के आकार का वक्र प्राप्त होगा। विषम श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने से असंतुलित वक्र प्राप्त होगा। पथुशीर्षत्व को ककुदता के नाम से भी जाना जाता है। **मीज़ोक्युरेटिक**, '**लेपटोक्युरेटिक**' तथा '**प्लेटीक्यूरेटिक**' शब्दों का प्रयोग पृथुशीर्षत्व के प्रकार के लिए किया जाता है।

इकाई 3 : प्रायिकता-I

इकाई की रूपरेखा

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् पाठक जान सकेंगे कि :

1. एक प्रयोग की एक घटना प्रयोग के कुछ परिणाम का संग्रह होती हैं।
2. एक घटना E की आनुभविक (या प्रायोगिक) P(E) प्रायिकता है :

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिसमें } E \text{ घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

3. किसी घटना के घटने की प्रायिकता और 1 के बीच (जिसमें 0 और 1 सम्मिलित है) होती है।

3.0 प्रस्तावना (Introduction)

हमें अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार के कथन सुनने को मिलते रहते हैं:

(1) संभवतः आज वर्षा होगी।

(2) मुझे संदेह है कि वह इस परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

(3) वार्षिक परीक्षा में कविता के प्रथम आने की संभावना सबसे अधिक है।

(4) डीजल की कीमत बढ़ने की संभावना काफी अधिक है।

(5) आज के मैच में भारत के टाँस जीतने की संयोग 50-50 है।

यहाँ ऊपर के कथनों में प्रयुक्त संभवतः, 'संदेह', 'संयोग' आदि शब्दों में अनिश्चितता की भावना बनी रहती है। उदाहरण के लिए (1) में 'संभवतः वर्षा होगी का अर्थ यह होगा कि वर्षा हो सकती है और नहीं भी हो सकती है। वर्षा होने की प्रागुक्ति (Prediction) हम अपने उन पिछले अनुभवों से करते हैं जबकि इसी प्रकार की अवस्थाओं के होने पर वर्षा हुई थी। इसी प्रकार की प्रागुक्तियाँ (2) से (5) तक की स्थितियों के संबंध में भी की जाती हैं। अनेक स्थितियों में 'प्रायिकता' (Probability) की सहायता से 'संभवतः' आदि जैसी अनिश्चिचता का संख्यात्मक रूप से मापन किया जा सकता है।

यद्यपि प्रायिकता की व्युत्पत्ति जुए के खेल से हुई थी, फिर भी इसका व्यापक प्रयोग भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, आयुर्विज्ञान, मौसम का पूर्वानुमान आदि क्षेत्रों में हो रहा है।

3.1 प्रायिकता सिद्धान्त का सूत्रपात

प्रायिकता (Probability) की संकल्पना का विकास एक आश्चर्यजनक ढंग से हुआ था। 1654 में शेवेलियर डि मेरे नामक जुआरी पासा संबंधी कुछ समस्याओं को लेकर सत्राहवीं के एक सुप्रसिद्ध फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ ब्लेज पास्कल के पास पहुँचा। पास्कल को इन समस्याओं को हल करने में काफी रूचि आने लगी, वह इन समस्याओं पर अध्ययन करने लगा और एक अन्य फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे दि फर्मा के साथ चर्चा भी की। पास्कल और फर्मा ने इन समस्याओं को स्वतंत्र रूप से अलग-अलग हल किया। यह कार्य ही प्रायिकता सिद्धान्त (Probability theory) का प्रारंभ था।

इस विषय पर पहली पुस्तक इतालवी गणितज्ञ जे0 कार्डन, 1501-1576, ने लिखी थी। इस पुस्तक का शीर्षक 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Alease) था. जो कि 1663 में प्रकाशित हुई थी। इस विषय पर गणितज्ञों ने बर्नूली (1654-1705), पी0 लाप्लास। (1749-1827), ए0ए0 मार्कोव (1856-1922) और ए0 एन0 कोल्मोगोरोव (1903) का भी महत्वपूर्ण रहा है।

3.2 यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

दैनिक जीवन में हम ऐसे कई क्रियाकलाप करते हैं जिनके परिणाम सदैव एक ही

होते हैं। चाहे उन्हें कितनी बार भी दोहराया जाए। उदाहरण के लिए दिए गए त्रिभुज के कोणों का मान न जानते हुए भी हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि कोणों का योग 180π होगा।

हम इस प्रकार के भी कई प्रायोगिक क्रियाकलाप करते हैं जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी परिणाम सदैव एक सा नहीं होता है।। उदाहरण के लिए जब एक सिक्के को उछाला जाता है तो चित्त (head) आ सकता है या पट् (tail) आ सकता है लेकिन हम यह निश्चित नहीं कर सकते हैं कि वास्तविक परिणाम इन दोनों में से क्या होगा? इस प्रकार के परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है। अतः एक परीक्षण को यादृच्छिक परीक्षण कहा जाता है यदि यह निम्नलिखित दो प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

(1) इसके एक से अधिक संभावित परिणाम हो।

(2) परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना संभव न हो।

जाँच कीजिए कि एक पासा को फेंकने का परीक्षण यादृच्छिक है या नहीं? इस अध्याय में एक यादृच्छिक परीक्षण को केवल परीक्षण कहा गया है जब तक कि अन्यथा व्यक्त न किया गया हो।

3.3 परिणाम और प्रतिदर्श समष्टि (Results and sample space)

किसी यादृच्छिक परीक्षण के किसी संभांवित नतीजे को परिणाम कहते हैं। एक पासा फेंकने में परीक्षण पर विचार करें। यदि हम पासे के ऊपरी फलक पर अंकित बिदुओं की संख्या में रूचि रखते हैं तो इस परीक्षण के परिणाम 1,2, 3, 4, 5, या 6 हैं। सभी परिणामों का समुच्चय (1, 2, 3, 4, 5, 6) इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

अतः किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है। प्रतिदर्श समष्टि को संकेत S द्वारा प्रकट किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है। दूसरे शब्दों में, यादृच्छिक परीक्षण का प्रत्येक परिणाम भी प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 दो सिक्कों (एक 1 रु. का तथा दूसरा 2 रु. का) को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल - स्पष्टतः सिक्के इस अर्थ में विभेद्य हैं कि हम उनको पहला सिक्का और दूसरा सिक्का संबोधित कर सकते हैं। क्योंकि दोनों सिक्कों में से किसी पर चित्त (H) या पट् (T) प्रकट हो सकते हैं, इसलिए संभव परिणाम निम्नलिखित हो सकते हैं।

दोनों सिक्कों पर चित्त = (H,H) = (HH)

पहले सिक्कों पर चित्त और दूसरे पर पट् = (H,T) = HT

पहले सिक्के पर पट् और दूसरे पर चित्त = (T,H) = TH

दोनों सिक्कों पर पट् = (T,T) =TT

अतएव, दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, HT, TH, TT}है।

3.4 घटना (Event)

हमने यादृच्छिक परीक्षण और उसके प्रतिदर्श समष्टि के बारे में पढ़ा है। किसी परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि उस परीक्षण से संबंधित सभी प्रश्नों के लिए सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set) होता है। एक सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। संबंधित प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, HT, TH, TT}है।

अब मान लीजिए कि हमारी रूचि उन परिणामों में है जो तथ्यतः एक चित्त प्रकट होने के अनुकूल होते हैं। हम पाते हैं कि इस घटना के होने के अनुकूल S के अवयव केवल HT और TH हैं। यह दो अवयव एक समुच्चय E = {HT,TH} बनाते हैं। हम जानते हैं कि समुच्चय E प्रतिदर्श समष्टि S का उपसमुच्चय हैं। इसी प्रकार हम पाते हैं कि विभिन्न घटनाओं और S के उपसमुच्चयों में निम्नलिखित संगतता है।

घटना का वर्णन	**S का संगत उपसमुच्चय**
पटों की संख्या तथ्यतः दो हैं	A = {TT}
पटों की संख्या कम से कम 1 है।	B = {HT, TH, TT}
पटों की संख्या अधिकतम 1 है।	C = {HT, TH, TT}
द्वितीय उछाल में चित्त नहीं है।	D = {HT, TT}
चित्तों की संख्या अधिकतम दो है	S = {HH, HT, TH,TT}
चित्तों की संख्या दो से अधिक है	ϕ

उपर्युक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि प्रतिदर्श समष्टि के किसी उपसमुच्चय के संगत

एक घटना होती है और किसी घटना के संगत समष्टि का एक उपसमुच्चय होता है। इसके संदर्भ में एक घटना को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है। **प्रतिदर्श समष्टि का कोई उपसमुच्चय एक घटना कही जाती है।**

3.4.1 घटनाओं के प्रकार (Types of events)

घटनाओं को उनके अवयवों के आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

1. **असंभव व निश्चित घटनाएँ** (Impossible and Sure Events) रिक्त समुच्चय ϕ और प्रतिदर्श S समष्टि भी घटनाओं को व्यक्त करते हैं। वास्तव में ϕ को असंभव घटना और S अर्थात् पूर्ण प्रतिदर्श समष्टि को निश्चित घटना कहते हैं।

   इन्हें समझने के लिए आइए पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार करें। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S = {1, 2, 3, 4, 5, 6 } है।

   मान लीजिए E घटना 'पासे पर प्रकट संख्या 7 का गुणज हैं को निरूपित करता है। क्या आप घटना E के संगत उपसमुच्चय लिख सकते हैं?

   स्पष्टतया परीक्षण का कोई भी परिणाम घटना E के प्रतिबंध को संतुष्ट नहीं करता है, अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि का कोई भी अवयव घटना E के घटित होने को निश्चित नहीं करता है। अतः हम कह सकते हैं कि केवल रिक्त समुच्चय ही घटना E के संगत समुच्चय है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि पासे के ऊपरी फलक पर 7 का गुणज प्रकट होना असंभव है।

   इस प्रकार घटना E = ϕ एक असंभव घटना है।

   आइए अब हम एक अन्य घटना F 'पासा पर प्राप्त संख्या या तो सम है या विषम' पर विचार करें। स्पष्टतया F = {1,2,3,4,5,6} = S

   अर्थात् सभी परिणाम घटना F के घटित होने को निश्चित करते हैं। अतः F = S एक निश्चित घटना है।

2. **सरल घटना (Simple Event)** यदि किसी घटना E में केवल एक ही प्रतिदर्श बिन्दु हो, तो घटना E को सरल या प्रारंभिक घटना कहते हैं। ऐसा परीक्षण जिसके प्रतिदर्श समष्टि जिसमें पृथक अवयव हों, में n सरल घटनाएँ

विद्यमान होती हैं।

उदाहरण के लिए, एक सिककों के दो उछालों वाले परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ है।

प्रायिकता 411

यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की चार सरल घटनाएँ हैं, जो निम्नलिखित हैं।

$E_1 = \{HH\}$, $E_2 = \{HT\}$, $E_3 = \{TH\}$ और $E_4 = \{TT\}$

2. **मिश्र घटना (Compound Events)** यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं, तो उसे मिश्र घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए एक सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निम्नलिखित घटनाएँ मिश्र घटनाएँ हैं:

E : तथ्यतः एक चित्त प्रकट होना

F : न्यूनतम एक चित्त प्रकट होना

G : अधिकतम एक चित्त प्रकट होना इत्यादि।

इन घटनाओं के संगत S के उपसमुच्चय निम्नलिखित हैं:

$E = \{HTT, THT, TTH\}$

$F = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G = \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

उपर्युक्त प्रत्येक उपसमुच्चय में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु हैं इसलिए यह सब मिश्र घटनाएँ हैं।

3.4.2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually exclusive events)

पासा फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। मान लीजिए घटना A 'एक विषम संख्या का प्रकट होना' और घटना B 'एक सम संख्या का प्रकट होना' को व्यक्त करते हैं। स्पष्टतया घटना A घटना B को अपवर्जित कर रही है तथा इसका विलोम भी सत्य है। दूसरे शब्दों में, ऐसा कोई परिणाम नहीं है जो घटना A और B के एक साथ घटित होने को निश्चित करता है। यहाँ $A = \{1,3,5\}$ और $B = \{2,4,6\}$

स्पष्टतया $A \cap B = \phi$ अर्थात् A और B एक असंयुक्त समुच्चय है। व्यापकतः

दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कही जाती हैं, यदि इनमें से किसी एक का घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात् वे एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं। इस दशा में समुच्चय A और B असंयुक्त होते हैं।

पुनः एक पासे को फेंकने के परीक्षण में घटना A 'एक विषम संख्या प्रकट होना' और घटना B4 से छोटी संख्या प्रकट होना' पर विचार कीजिए।

प्रत्यक्षतः $A = \{1,3,5\}$ और $B = \{1,2,3\}$ अब $3 \in A$ तथा साथ ही $3 \in B$

इसलिए A और B असंयुक्त नहीं है। अतः A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं टिप्पणी एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

3.4.3 निःशेष घटनाएँ (Exhaustive events)

एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। हम पाते हैं $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, आइए निम्नलिखित घटनाओं को परिभाषित करें:

A : '4 से छोटी संख्या प्रकट होना',

B: '2 से बड़ी किन्तु 5 से छोटी संख्या प्रकट होना'

और C :'4 से बड़ी संख्या प्रकट होना',

तब $A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4\}$ और $C = \{5,6\}$ हम देखते हैं कि

$A \cup B \cup C = \{1,2,3\} \cup 3,4\} \cup \{5,6\} = S.$

ऐसी घटनाओं A, B और C को निःशेष घटनाएँ कहते हैं। व्यापक रूप में यदि $E_1, E_2, ..., E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ हैं और यदि

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 ...... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

तब $E_1, E_2, ..., E_n$ को निःशेष घटनाएँ कहते हैं। दूसरे शब्दों में, घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ निःशेष कहलाती हैं यदि परीक्षण के करने पर इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो।

इसके अतिरिक्त यदि सभी $i \neq j$ के लिए अग्रतः यदि अर्थात् E_i और E_j परस्पर अपवर्जी हैं, और $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ हो, तो घटनाएँ $E_1, E_2, ..., E_n$ परस्पर अपवर्जी निःशेष घटनाएँ कहलाती हैं।

3.5 प्रायिकता :

मान लीजिए एक सिक्के को यादृच्छया उछाला जाता है। हम पहले से जानते हैं कि सिक्का दो संभव विधियों में से केवल एक ही विधि से गिर सकता है- या तो चित्र ऊपर होगा या फिर पट ऊपर होगा। हम सिक्के के, उसके किनारे (edge) के अनुदिश गिरने की संभावना को अस्वीकार करते हैं, जो उदाहरणार्थ, तब संभव है तब सिक्का रेत पर गिरे। हम यह तर्कसंगतरूप से मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम, चित्त या पट, का प्रकट होना उतनी ही बार हो सकता है जितना कि अन्य परिणाम का। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि परिणाम चित्त और पट समप्रायिक (equally likely) हैं। समप्रायिक परिणामों के एक अन्य उदाहरण के लिए मान लीजिए कि हम एक पासे को फेंकते हैं, हमारे लिए एक पासे का अर्थ सदैव एक न्यायसंगत पासे से होगा। संभव परिणाम क्या है? ये 1,2,3, 4,5, 6 हैं। प्रत्येक संख्या के ऊपर आने की समान संभावना है। अतः पासे को फेंकने से प्राप्त होने वाले समप्रायिक परिणाम 1,2,3,4,5 और 6 हैं। क्या प्रत्येक प्रयोग के परिणाम समप्रायिक होते हैं? मान लीजिए एक थैले में 4 लाल गेंदें और 1 नीली गेंद है तथा आप इस थैले में से, बिना थैले के अन्दर कुछ देखे, एक गेंद निकालते हैं। इसके क्या परिणाम हैं? क्या एक लाल गेंद और एक नीली गेंद के परिणाम समप्रायिक हैं? चूंकि यहाँ 4 लाल गेंदे हैं और नीली गेंद केवल एक ही, अतः आप यह अवश्य स्वीकार करेंगें कि आपके द्वारा एक नीली गेंद की अपेक्षा एक लाल गेंद निकालने की संभावना अधिक है। अतः ये परिणाम, एक लाल गेंद और एक नीली गेंद समप्रायिक नहीं है। परन्तु थैले में से किसी एक भी रंग की गेंद निकालने के परिणाम समप्रायिक हैं। अतः सभी प्रयोगों के परिणामों का समप्रायिक होना आवश्यक नहीं है। परन्तु इस अध्याय में, हम आगे यह मानकर चलेंगे कि सभी प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं।

एक घटना की प्रयोगात्मक या आनुभविक प्रायिकता P(E) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया गया है :

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

उदाहरण 1 एक थैले में एक लाल गेंद, एक नीली गेंद और एक पीली गेंद है तथा सभी गेंदे एक ही साइज की हैं। कृतिका बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद (i) पीली होगी? (ii) लाल होगीं? (iii) नीली होगी।

हल : कृतिका थैले में से, उसमें बिना झाँके, गेंद निकालती है। अतः उसके द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना 'पीली गेंद निकालना घटना' Y है, 'लाल गेंद निकालना घटना R है तथा नीली गेंद निकालना' घटना B है। अब, सभी संभव परिणामों की संख्या = 3 है।

(i) घटना Y के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अतः $P(Y) = 1/3$

इसी प्रकार, $P(R) = 1/3$ और $P(B) = 1/3$

टिप्पणी :

(1) किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो **प्रारंभिक घटना** (elementary event) कहलाती है। उदाहरण 1 में दोनों घटनाएँ E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं।

(2) घटना E 'नहीं' को निरूपित करने वाली घटना E घटना की **पूरक** (complimentary) घटना कहलाती है हम यह भी कहते हैं कि E और E परस्पर पूरक घटनाएँ हैं।

(3) प्रायिकता P(E) की परिभाषा से, हम देखते हैं कि अंश, (घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या) सदैव हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से छोटा होता है या उसके बराबर होता है। अतः $0 \geq P(E) \leq 1$

प्रश्नः

1. निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए :

(i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = ... है।

(ii) उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती ....है। ऐसी घटना.......... कहलाती है।

(iii) उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित ....है। ऐसी घटना ....कहलाती है।

(iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग .... है।

(v) किसी घटना की प्रायिकता .... से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा ....से छोटी या उसके बराबर होती है।

3.6 सैद्धान्तिक प्रायिकता

प्रायिकता की आनुभविक व्याख्या का बड़ी संख्या में दोहराए जा सकने वाले किसी भी प्रयोग से जुड़े प्रत्येक घटना के लिए अनुप्रयोग किया जा सकता है। किसी प्रयोग को दोहराने की आवश्यकता एक गंभीर परिसीमा है, क्योंकि अनेक स्थितियों में

यह अधिक व्यय वाला हो सकता है या यह भी हो सकता है कि ऐसा करना संभव ही न हो। निस्संदेह, सिक्का उछालने या पासा फेंकने के प्रयोगों में, इसमें कोई कठिनाई नहीं हुई। परंतु एक उपग्रह (Satellite) छोड़ने के प्रयोग को यह परिकलित करने के लिए बार-बार दोहराने की छोड़ते समय उसकी असफलता की आनुभवित प्रायिकता क्या है, के बारे में आप क्या सोचते हैं अथवा यह कि एक भूकंप के कारण कोई बहुमंजिली इमारत नष्ट होगी या नहीं, की आनुभविक प्रायिकता परिकलित करने के लिए भूकंप की परिघटना के दोबारा घटित होने के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

ऐसे प्रयोगों में, जहाँ हम कुछ कल्पनाओं को सही मानने को तैयार हो जाएँ, हम एक प्रयोग के दोहराने से बच सकते हैं, क्योंकि वे कल्पनाएँ सीधे सही (सैद्धान्तिक) प्रायिकता परिकलित करने में हमारी सहायता करती हैं। परिणामों के समप्रायिक होने की कल्पना (जो अनेक प्रयोगों में मान्य होती है, जैसे कि ऊपर सिक्का उछालने और पासा फेंकने के दोनों उदाहरणों में है) इन कल्पनाओं में से एक है जो हमें किसी घटना की प्रायिकता की निम्नलिखित परिभाषा की ओर अग्रसर करती है।

किसी घटना E की सैद्धान्तिक प्रायिकता (theoretical probability) जिसे परंपरागत प्रायिकता (classical probability) भी कहा जाता है। P(E) निम्नलिखित रूप में परिभाषित की जाती है।

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

यहाँ हम यह कल्पना करते हैं कि प्रयोग के परिणाम समप्रायिक हैं। हम संक्षिप्त रूप में, सैद्धान्तिक प्रायिकता को केवल प्रायिकता ही कहेंगे।

प्रायिकता की उपरोक्त परिभाषा 1795 में पियरे-साइमन लाप्लास (Pierre-Simon Laplace) ने दी ।

उदाहरण 2: एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञज्ञत कीजिए, जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है । साथ ही एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, संभव परिणामों की संख्या 2 है- चित्त (H) और पट (T)। मान लीजिए घटना 'चित्त प्राप्त करना' है। तब E के अनुकूल (अर्थात् चित्त प्राप्त करने के अनुकूल) परिणाम 1 है। अतः

$$P(E) = P(\text{चित्त}) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार यदि घटना F पट प्राप्त करना है, तो P(F)=P (पट) = 1/2

उदाहरण 3 : मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं। (i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है? (ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल : (i) यहाँ मान लीजिए कि '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना घटना E है। सभी संभव परिणाम छः हैं, ये 1,2,3,4, 5 और 6 हैं। स्पष्टतः घटना के अनुकूल परिणाम 5 और 6 हैं। अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या 2 है इसलिए P(E) = P (4 से बड़ी संख्या) = 2/6 = 1/3, (ii) मान लीजिए '4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करना' घटना F है। सभी संभव परिणाम = 6 हैं। घटना F के अनुकूल परिणाम 1,2,3 और 4 हैं। अतः F के अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है इसलिए P(E) = 4/6 = 2/3, क्या उपरोक्त उदाहरण में दी हुई घटना E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं ? नहीं ये प्रारंभिक घटनाएँ नहीं हैं, क्योंकि घटना E के 2 परिणाम हैं तथा घटना F के 4 परिणाम हैं।

टिप्पणी : उदाहरण 1 से हम देखते हैं कि $P(E) + P(F) = 1/2 + {}^1/_2 = 1$ .....(1)

जहाँ घटना E 'एक चित्त प्राप्त करना' है तथा घटना F एक पट प्राप्त करना' है।

उदाहरण 3 के (i) और (ii) से भी हम देखते हैं कि

$P(E) + P(F) = 1/3+2/3 = 1$........................(2)

जहाँ घटना E'4 से बड़ी सख्या प्राप्त करना' तथा घटना F'4 के बराबर या कम संख्या प्राप्त करना' है। ध्यान दीजिए कि 4 से बड़ी संख्या नहीं प्राप्त करने का अर्थ वही है। जो 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करने का है। और इसी प्रकार इसका विलोम भी यही प्रकट करता है।

उपरोक्त (1) और (2) में, क्या घटना 'F', 'E' नहीं (not E) के समान नहीं है। हाँ ऐसा ही है। हम घटना E नहीं को 'E' से व्यक्त करते हैं।

अतः P(E) + P(E नहीं) = 1

अर्थात् P(E) + P(E नहीं) = 1 है, जिससे P(E) =1 –P(E') प्राप्त होता है।

व्यापक रुप में, किसी घटना E के लिए यह सत्य है कि

$P(E') = 1 - P(E)$

घटना 'E नहीं को निरूपित करने वाली घटना E घटना की पूरक (Complementary) घटना कहलाती है। हम यह भी कहते हैं कि E और E' परस्पर पूरक घटनाएँ हैं।

उदाहरण 4 : अच्छी प्रकार से फेटी गयी 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ताः

(i) एक इक्का होगा।

(ii) एक इक्का नहीं होगा।

हल : गड्डी को अच्छी प्रकार से फेटने के परिणामों का समप्रायिक होना सुनिश्चित हो जाता है।

(i) एक गड्डी में 4 इक्के होते हैं। मान लीजिए घटना E 'एक इक्का होना' है।
E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4
सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 अतः $P(E) = 4/52 = 1/13$

(ii) मान लीजिए घटना F 'एक इक्का नहीं' है।

माना F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 52−4 = 48

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 अतः $P(E) = 48/52 = 12/13$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि F और कुछ नहीं बल्कि E ही है। अतः हम P(E) को इस प्रकार भी परिकलित कर सकते हैं : $P(E) = P(E) = 1 - P(E) = 1\text{-}1/13 = 12/13$

प्रश्नः

2. निम्नलिखित प्रयोगों में से किन-किन प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं? स्पष्ट कीजिए।

(i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलना प्रारम्भ हो जाती है या कार चलना प्रारंभ नहीं होती है।

(ii) एक एक खिलाड़ी बास्केटबाल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है।

(iii) एक सत्य – असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत होगा।

(iv) एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या लड़की है।

3. फुटबॉल के खेल को प्रारंभ करते समय यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम पहले बॉल लेगी, इसके लिए सिक्का उछालना एक न्यायसंगत विधि क्यों माना जाता है।

4. निम्नलिखित में सो कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

(A) 2/3 (B)-1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

6. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली

(i) संतरे की महक वाली है?

(ii) नीबू की महक वाली है?

3.7 सारांश

इस अध्याय में आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. प्रायोगिक प्रायिकता और सैद्धान्तिक प्रायिकता में अंतर
2. घटना E की सैद्धान्तिक या परंपरागत प्रायिकता P(E) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

जहाँ हम कल्पना करते हैं कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक हैं।

3. एक निश्चित (या निर्धारित) घटना की प्रायिकता 1 होती है।
4. एक असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।
5. घटना E की प्रायिकता एक ऐसी संख्या P(E) है कि $0 \geq P(E) \leq 1$
6. वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो एक प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 होता है।
7. किसी भी घटना E के लिये $P(E) + P(E) = 1$ होता है, जहाँ E घटना Eनहीं को व्यक्त करता है। E और E पूरक घटनाएँ कहलाती है।

इकाई 4 : प्रायिकता-II

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् पाठक जान सकेंगे कि :

1. किसी घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional probability) के गुण।
2. प्रायिकता का योग नियम एवं प्रायिकता का गुणन नियम।
3. स्वतंत्र घटनाएँ एवं पराश्रित (dependent) घटनाएँ

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

इस अध्याय में हम किसी घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता (conditional prbability) के बारे में विचार करेंगे, जबकि किसी अन्य घटना के घटित होने की सूचना हमारे पास हो, तथा इस महत्वपूर्ण अवधारणा की सहायता से बेज-प्रमेय (Bayes' variable) प्रायिकता का गुणन नियम तथा स्वतंत्रता घटनाओं के बारे में समझेंगे। हम यादृच्छिक चर (random variable) और इसके प्रायिकता बंटन की महत्त्वपूर्ण अवधारणा को भी समझेंगे तथा किसी प्रायिकता बंटन के माध्य (mean) व प्रसरण के बारे में भी पढ़ेंगे। अध्याय के अंतिम अनुभाग में हम एक महत्वपूर्ण असंतत प्रायिकता बंटन (discrete probability distribution) के बारे में पढ़ेंगे जिसे द्विपद बंटन कहा जाता है। इस अध्याय में हम ऐसे परीक्षण लेंगे जिनके परिणाम समसंभाव्य होते हैं, जब तक कि अन्यथा न कहा गया हो।

4.2 सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability)

अभी तक हमने किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने पर चर्चा की है। यदि हमें किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ दी गई हों, तो क्या किसी एक घटना के घटित होने की सूचना का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर पड़ता है? आइए इस प्रश्न के उत्तर के लिए एक यादृच्छिक परीक्षण पर विचार करें जिसके परिणाम समसंभाव्य है।

आइए अब तीन न्यायय (fair) सिक्कों को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि हैं :

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

क्योंकि सिक्का न्यायय हैं, इसलिए 'हम प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक बिन्दु की प्रायिकता 1/8 निर्दिष्ट कर सकते हैं। मान लीजिए E घटना न्यूनतम दो चित्त प्रकट होना और F घटना ''पहले सिक्के पर पट प्रदर्शित होना'' को निरूपित करते हैं।

तब $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

और $F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

इसलिए $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\}) =$

$1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$ (क्यों ?)

और $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(TTH\}) + P(\{TTT\})$

$= 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 12$

साथ ही $E \cap F = \{THH\}$

इसलिए $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = 1/8$

अब मान लीजिए हमें दिया गया है कि पहले सिक्के पर पट प्रकट होता है अर्थात् घटना घटित हुई है, तब घटना E की प्रायिकता क्या है? F के घटित होने की सूचना पर यह निश्चित है कि E की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए उन प्रतिदर्श बिन्दुओं पर विचार नहीं किया जाएगा जिनमें पहले सिक्के पर पट नहीं है। घटना E के लिए इस सूचना से प्रतिदर्श समष्टि S से घटकर इसका उपसमुच्चय F बन गया है। अन्य शब्दों में, इस अतिरिक्त सूचना ने हमें वास्तव में यह बताया है कि हालात को एक ऐसे नए यादृच्छिक परीक्षण के रूप में समझना चाहिए जिसका प्रतिदर्श समष्टि केवल उन परिणामों का समुच्चय है जो कि घटना F के अनुकूल है।

अब F का वह प्रतिदर्श बिन्दु जो E के भी अनुकूल है, THH है। अतः F को प्रतिदर्श समष्टि मानते हुए घटना E की प्रायिकता = 1/4

या F का घटित होना दिया गया होने पर E की प्रायिकता = 1/4

घटना E की इस प्रायिकता को सप्रतिबंध प्रायिकता कहते हैं, जबकि ज्ञात है कि घटना F घटित हो चुकी है, और इसे P (E/F) द्वारा दर्शाते हैं।

अर्थात् P (E/F) = 1/4

नोट कीजिए कि F के वो अवयव जो घटना E के भी अनुकूल हैं, E तथा F के साझे अवयव होते हैं, अर्थात् $E \cap F$ के प्रतिदर्श बिन्दु हैं।

अतः हम घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता, जबकि ज्ञात है कि घटना घटित हो चुकी है को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P(E/F) = \frac{(E \cap F) \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{F \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

अब अंश व हर को प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की कुल संख्या से विभाजित करने पर हम देखते हैं कि P(E/F) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$P(E/F) = \frac{\dfrac{n(E/F)}{n(s)}}{\dfrac{n(F)}{n(s)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

नोट कीजिए कि (1) तभी मान्य है जब $P(F) \neq 0$ अर्थात् $F = \phi$ (क्यों ?)

अतः हम संप्रतिबंध प्रायिकता को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं :

परिभाषा 1 यदि E तथा F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हैं, तो F के घटित होने की सूचना पर F की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्रों के प्राप्त होती है।

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{जबकि } P(F) \neq 0$$

4.2.1 सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण (Properties of conditional probability)

मान लें कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ हैं।

गुण 1 P (S/F) = P (F/F) = 1

हमें ज्ञात है कि $P(S/F) = P(S \cap F) / P(F) = P(F)/P(F) = 1$

साथ ही $P(F/F) = P(F \cap F) / P(F) = P(F) / P(F) = 1$

अतः P(S/F) = P (F/F) = 1

गुण 2, यदि A और B प्रतिदर्श समष्टि की कोई दो घटनाएँ हैं और एक अन्य घटना इस प्रकार है कि $P(F) \neq 0$ तब

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A/F) + P(B/F) - P[(A \cap B)|F]$$

विशेष रूप से यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं हों तो

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A/F) + P(B/F)$$

हम जानते हैं कि

$$P[(A \cup B)|F)] = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

(समुच्चयों के सर्वनिष्ठ पर सम्मिलन के बंटन नियम द्वारा)

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A/F) + P(B/F) - P(A \cap B/F)$$

जब A तथा B परस्पर अपवर्जी हों तो

$$P[(A \cup B)/F)] = 0$$

$$\Rightarrow P[(A \cup B)/F)] = P(A/F) + P(B/F)$$

अतः जब A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों तो $P(A \cup B) = P(A/F) + P(B/F)$

गुण 3, P (E'/F) = 1 –P(E/F)

गुण 1 से हमें ज्ञात है कि P(S/F) = 1

$\Rightarrow P[(E \cup E')/F] = 1$ क्योंकि $S = E \cup E'$

$\Rightarrow P[(E/F) + P(E2/F) = 1$ क्योंकि E तथा E' परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

अतः $P[(E'/F) = 1 - P(E/F)$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण - 1 यदि $P(A) = 7/13, P(B) = 9/13$ और $P(A \cap B) = 4/13$ तो P(A/B) ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $P(A/B) = (PA \cap B)/P(B) = \frac{4/13}{9/13} = 4/9$

उदाहरण 2 एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

हलः मान लीजिए b लड़के को व g लड़की को निरूपित करते हैं। परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है :

$S = \{ (b,b), (b,g), (g,b,), (g,g)\}$

मान लीजिए E तथा F क्रमशः निम्नलिखित घटनाओं को दर्शाते हैं।

E : दोनों बच्चे लड़के हैं

F : बच्चों में से कम से कम एक लड़का है।

तब $E = \{(b,b)\}$ और $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

अब $E \cap F = \{(b.b)\}$

अतः $P(F) = {}^3/_4$ और $P(E \cap F) = {}^1/_4$

इसलिए

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

उदाहरण 3 एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गए और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से में एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो इस संख्या के सम होने की क्या प्रायिकता है?

हलः मान लीजिए कि A घटना निकाले गए कार्ड पर सम संख्या है' और B घटना 'निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से बड़ी है' को निरूपित करते हैं। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है : $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$

तब $A = \{2,4,6,8, 10\}$, $B = (4,5,6,7,8,9,10\}$ और $A \cap B = \{4, 6,8, 10\}$

तब $P(A) = 5/10$, $P(B) = 7/10$, और $P(A \cap B) = 4/10$

अब $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/10}{7/10} = 4/7$

उदाहरण 4: एक पाठशाला में 1000 विद्यार्थी हैं, जिनमें से 430 लड़कियाँ हैं। यह ज्ञात है कि 430 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती हैं। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है?

हलः मान लीजिए E घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है', और F घटना 'यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़की हैं, को व्यक्त करते हैं। हमें $P(E/F)$ ज्ञात

करना है।

अब $P(F) = 430/ 1000 = 0.43 =$ और $P(E \cap F) = 43/1000 = 0.043$ (क्यों?)

तब $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$

उदाहरण 5: एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण में घटना A तथा B को निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है :

A : 'तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना'

B : 'पहली उछाल पर संख्या 6 और उछाल पर संख्या 5 प्रकट होना'

यदि B का घटित होना दिया गया है, तो घटना A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल प्रतिदर्श समष्टि में 216 परिणाम है।

अब, $B = \{6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$

$$A = \begin{bmatrix} (1,1,4)\,(1,2,4)\ldots(1,6,4)\,(2,1,4)\,(2,2,4)\ldots(2,6,4) \\ (3,1,4)\,(3,2,4)\ldots(3,6,4)\,(4,1,4)\,(4,2,4)\ldots(4,6,4) \\ (5,1,4)\,(5,2,4)\ldots(5,6,4)\,(6,1,4)\,(6,2,4)\ldots(6,6,4) \end{bmatrix}$$

और $A \cap B = \{(6,5,4)\}$

अब $P(B) = 6/216$ और $P(A \cap B) = 1/216$

तब $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/216}{6/216} = 1/6$

प्रश्नावली

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनें।

1. यदि $P(A) = 1/2$, $P(B) = 0$ तब $P(A|B)$ हैं:

   (A) 0 (B) 1/2 (C) परिभाषित नहीं (D) 1

2. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $A(A|B) = P(B|A) \neq 0$ तब

   (A) $A \subset B$ (B) $A = B$ (C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

4.2.2 प्रायिकता का योग नियम (Addition Theorem of Probability)

(1) यदि दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हों तो
$P(A \cap B) = P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

(2) दो घटनायें A तथा B आपस में पराश्रित (dependent) हों तो
$P(A \cap B) = P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.2.3 प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication Theorem of Probability)

(1) यदि दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हों तो

$$P(A \cap B) = P(A\,B) = P(A)\,.\,P(B)$$

(2) दो घटनायें A तथा B आपस में पराश्रित (dependent) हों तो

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A\,B) &= P(A)\,.\,P(B/A) \\ &= P(A)\,.\,P(A/\,B) \end{aligned}$$

मान लीजिए कि E तथा F एक प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ हैं। स्पष्टतया समुच्चय $E \cap F$ दोनों घटनाओं E तथा F के घटित होने को दर्शाता है। अन्य शब्दों में $E \cap F$ घटनाओं E तथा F के युगपत घटित होने को दर्शाता है। घटना E/F को EF भी लिखा जाता है।

प्रायः हमें संयुक्त घटना EF की प्रायिकता ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, एक के बाद दूसरा पत्ता निकालने के परीक्षण में हम मिश्र घटना 'एक बादशाह और एक रानी' की प्रायिकता ज्ञात करने में इच्छुक हो सकते हैं। घटना EF की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम सप्रतिबंध प्रायिकता का उपयोग करते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

हम जानते हैं कि घटना F के दिए जाने पर घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता को P(E/F) द्वारा दर्शाते हैं और इसे निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात करते हैं।

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)},\ P(F) \neq 0$$

उपरोक्त परिणाम से हम लिख सकते हैं कि

$P(E \cap F) = P(F).\ P(E/F)$ ......(1)

हम यह भी जानते हैं कि

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)},\ P(E) \neq 0$$

या

$$P(F\,|\,E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)},\ (\text{क्योंकि } E \cap F = F \cup E)$$

अतः $P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F/E)$ ..... (2)

(1) और (2) को मिलाने से हमें प्राप्त होता है कि

$P(E \cap F) = P(E)\ P(F/E) = P(E|F)$ जब कि $P(E) \neq 0$ और $P(F) \neq 0$ उपरोक्त परिणाम को 'प्रायिकता का गुणन नियम' कहते हैं। आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 8: एक कलश में 10 काली और 5 सफेद गेंदे हैं। दो गेंद एक के बाद एक निकाली जाती हैं और पहली गेंद दूसरे के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती हैं। मान लीजिए कि कलश में से प्रत्येक गेंद का निकालना समसंभाव्य है, तो दोनों काले गेंद निकलने की क्या प्रायिकता है?

हलः माना कि E 'पहली काली गेंद के निकलने' की घटना है और F 'दूसरी काली गेंद के निकलने' की घटना है। हमें P(E) F) या P(EF) ज्ञात करना है।

अब P(E) = P (पहली निकाल में काली गेंद निकालना) = 10/15

साथ ही दिया गया है कि पहली निकाल में काली गेंद निकली है अर्थात् घटना घटित हुई है, अब कलश में 9 काली गेंद और 5 सफेद गेंद रह गयी है। इसलिए, दूसरी गेंद काली होने की प्रायिकता जब कि पहली गेंद का काला होना हमें ज्ञात है, कुछ और नहीं केवल का सप्रतिबंध प्रायिकता है जब 3 का घटित होना ज्ञात है।

अर्थात् P(F/E) = 9/14

अब प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है।

$P(E \cap F) = P(E)\ P(F/E) = P(E)\ P(F|E),\ P(G|EF)$

$= 10/15 \times 9/14 = 3/7$

दो से अधिक घटनाओं के लिए प्रायिकता का गुणन नियम यदि और एक प्रतिदर्श समष्टि की घटनाएँ हैं तो

$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F/E) = P(G|E)F) = P(E)\,P(F|E)\,P(G|EF)$

इसी प्रकार प्रायिकता के गुणन नियम का विस्तार चार या अधिक घटनाओं के लिए भी किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण तीन घटनाओं के लिए प्रायिकता के गुणन नियम का दृष्टांत प्रस्तुत करता है।

4.3 स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events)

52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता निकालने के परीक्षण पर विचार कीजिए जिसमें प्रत्येक मौलिक घटना को संमसंभाव्य माना गया है। यदि E तथा F क्रमशः घटनाओं ''निकाला गया पत्ता चिड़ी का है'' और ''निकाला गया पत्ता एक इक्का है'' को व्यक्त करते हैं, तो

P (E) = 13/52 = 1/4

तथा P (F) = 4/52 = 1/13

साथ ही E और F घटना 'निकाला गया पत्ता चिड़ी का इक्का है' को व्यक्त करती हैं, इसलिए

$P(E \cap F) = 1/52$

अतः $P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/52}{1/4} = \frac{1}{4}$

क्योंकि P(E) = 1/4 = P (E|F) हम कह सकते हैं कि घटना F के घटित होने की सूचना ने घटना E की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं डाला है।

हमे यह भी प्राप्त है कि

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{1/52}{1/4} = 1/13 = P(F)$$

पुनः E (F) = 1/13 = P(E|F) दर्शाता है कि घटना E के घटित होने की सूचना ने घटना F की प्रायकिता पर कोई प्रभाव नहीं डाला है।

अतः E तथा F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि किसी एक घटना के घटित होने की सूचना दूसरी घटना की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नहीं डालती है। इस प्रकार की घटनाओं को '**स्वतंत्र घटनाएँ** कहते हैं।

परिभाषा 2 दो घटनाओं तथा को स्वतंत्रता धटनाएँ कहते हैं यदि

$P(F|E) = P(F)$ जबकि $P(E) \neq 0$

$P(E|F) = P(E)$ जबकि $P(F) \neq 0$

अतः इस परिभाषा में P(E) और P(F) का शून्येत्तर होना आवश्यक है।

अब प्रायिकता के गुणन नियम से

P(E) F) = P(E), P(F|E) .... (1)

यदि E और F स्वतंत्रता घटनाएँ हो तो (1) से हमें प्राप्त होता है कि

P(E) F) = P(E), P(F) .... (2)

अतः (2) के उपयोग से हम दो घटनाओं की स्वतंत्रता को निम्नलिखित तरह से भी परिभाषित कर सकते हैं।

परिभाषा 3 मान लें E और F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं, तो E और F स्वतंत्रता घटनाएँ होती हैं। यदि

P(E) F) = P(E) P(F)

टिप्पणी

1. दो घटनाओं E तथा F को पराश्रित (dependent) कहतै हैं, यदि वे स्वतंत्र न हों अर्थात् यदि $P(E \cap F) \neq P(E), P(F)$

2. कभी-कभी स्वतंत्र घटनाओं और परस्पर अपवर्जी घटनाओं के बीच भ्रम पैदा

हो जाता है। स्वतंत्रता घटनाओं की परिभाषा 'घटनाओं की प्रायिकता' के रूप में की गई है जबकि 'परस्पर अपवर्जी घटनाओं' की परिभाषा 'घटनाओं' के रूप में की गई है। इसके अतिरिक्त, परस्पर अपवर्जी घटनाओं में कोई भी परिणाम सार्व कदापि हीं हो सकता है किन्तु स्वतंत्र घटनाओं में परिणाम सार्व भी हो सकते हैं, यदि प्रत्येक घटना अतिरिक्त है। स्पष्टतया 'स्वतंत्र घटनाएँ' और 'परस्पर अपवर्जी घटनाएँ' समानार्थी नहीं हैं। दूसरे शब्दों में, यदि दो ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ घटती हैं जिनकी प्रायिकता शून्येत्तर हैं, तो वह परस्पर अपवर्जी नहीं हो सकती हैं। विलोमतः यदि दो शून्येत्तर प्रायिकता वाली परस्पर अपवर्जी घटनाएँ घटती हैं, तो वह स्वतंत्रता नहीं हो सकती हैं।

3. दो यादृच्छिक परीक्षण स्वतंत्र कहलाते हैं, यदि प्रत्येक घटना युग्म E और F के लिए जहाँ E पहले परीक्षण से तथा F दूसरे परीक्षण से संबंधित हैं, घटनाओं E तथा F के एक साथ घटित होने की प्रायिकता, जब दोनों परीक्षण संपन्न किए जाएँ, प्रायिकता P(E) और P(F) के गुणनफल के बराबर होती हैं, जिनका परिकलन दोनों परीक्षणों के आधार पर अलग-अलग किया जाता है। अर्थात् P(E)F) = P(E). P(F)

4. तीन घटनाओं A,B और C को स्वतंत्र कहा जाता है यदि और केवल यदि

   $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

   $P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$

   $P(B \cap B) = P(B)\ P(C)$

   और $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

   यदि उपरोक्त में से कम से कम एक भी शर्त सत्य नहीं होती है तो दी गई घटनाओं को स्वतंत्र नहीं कहा जाता है।

उदाहरण 10 एक पासे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पासे प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य हैं, को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम हैं, को F से निरूपित किया जाए तो बताएँ क्या घटनाएँ E और F स्वतंत्र है?

हलः हम जानते हैं कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है : S = {1,2,3,4,5, 6}

अब E = {3,6}, F = {2,4,6} और E) F = {6}

तब P(E) = 2/6 = 1/3, P(E) = 3/6 = 1/2 और $P(E \cap F) = 1/6$

स्पष्टतया $P(E \cap F) = P(E). P(F)$

अतः E और F स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण 11ः एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना द्वितीय उछाल पर

विषयम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए।

हलः यदि सभी 36 मौलिक घटनाओं को समसंभाव्य मान लें तो

$P(A) = 18/36 = 1/2$ और $P(B) = 18/36 = 1/2$

साथ ही $P(A \cap B) = P$ (दोनों उछालों में विषम संख्या प्राप्त होना) $= 9/36 = 1/4$

अब $P(A). P(B) = 1/2 + {}^1/_2 = {}^1/_4$

स्पष्टतया $P(A \cap B) = P(A). P(B)$

अतः A और B स्वतंत्रता घटनाएँ हैं।

उदाहरण 12: तीन सिक्कों को उछाला गया है। मान लें E घटना 'तीन चित या तीन पट प्राप्त होना' और F घटना 'न्यूनतम दो चित्त प्राप्त होना' और G घटना 'अधिकतम दो पट प्राप्त होना' को निरूपित करते हैं। युग्म (E,F), (E,G) और (F,G) में कौन-कौन से स्वतंत्र है? कौन-कौन से पराश्रित हैं?

हलः परीक्षण का प्रतिशत समष्टि है :

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

स्पष्टतया E = {HHH, TTT}. F = {HHH, HHT, HTH, THH}

और G = {HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

साथ ही E) F = {HHH}, E) G = {TTT}, F) G = {HHT, HTH, THH}

इसलिए $P(E) = 2/8 = 1/4$, $P(E) = 4/8 = 1/2$, $P(G) = 7/8$

$P(E\cap F) = 1/8$, $P(E \cap G)$ $1/8$, $P(F\cap G) = 3/8$

साथ ही $P(E). P(F) = 1/4 \text{ x } 1/2 = 1/8$, $P(E). P(G) = 1/4 \text{ x } 7/8 = 7/16$

अतः $P(E\cap F) = P(E). P(F)$

$P(E\cap G) = P(E). P(G)$

और $P(F\cap G) = P(F). P(G)$

इसलिए घटनाएँ (E और F) स्वतंत्र हैं जबकि घटनाएँ (F और G) और (E और G) पराश्रित हैं।

प्रश्नावली

1. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाल गए। दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है। तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। दो गेंद एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित

किए निकाली जाती है। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंदे हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए (i) दोनों गेंदे लाल हों (ii) प्रथम काली एवं दूसरी लाल हो (iii) एक काली तथा दूसरी लाल हो।

3. दो घटनाओं । और ठ को परस्पर स्वतंत्रा कहते हैं, यदि

   (A) A और B परस्पर अपवर्जी है (B) $P(A'B') = [1\text{-}P(A)] [1\text{-}P(B)]$

   (C) $P(A) = P(B)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

4.4 सारांश

यदि हमें किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ दी गई हैं, तो क्या किसी एक घटना के घटित होने की सूचना का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर पड़ता है। यदि E तथा F किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित दो घटनाएँ हैं, तो F के घटित होने की सूचना पर E की प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है।

$$P(E/F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}, \quad \text{जबकि} \quad P(F) \neq 0$$

सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण

मान लें कि E तथा F किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं

गुण 1 $P(S/F) = P(F|F) = 1$

गुण 2 यदि A और B प्रतिदर्श समष्टि S की कोई दो घटनाएँ हैं और F एक अन्य घटना इस प्रकार है कि $P(F) \neq 0$, तब

$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F) - P[(A \cap B)|F]$

गुण 3 $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

प्रायिकता का योग नियम

(1) यदि दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हो तो

$P(A \cap B) = P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$

(2) दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हो तो

$P(A \cap B) = P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

प्रायिकता का गुणन नियम

(1) यदि दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हो तो

$P(A \cap B) = P(A B) = P(A). P(B)$

(2) दो घटनायें A तथा B आपस में स्वतंत्र (independent) हो तो

$P(A \cap B) = P(A B) \quad = P(A). P(B/A)$

$= P(A). P(A/B)$

इकाई 5 : सप्रतिबंध सिद्धान्त (प्रायिकता) एवं बेज़ - प्रेमय Coditional Theory and Baye's Theorem

इकाई की रूपरेखा

5.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् पाठक जान सकेंगे :

1. दैव चर तथा देवचर का प्रत्याशित मूल्य
2. द्विपद बंटन, उसकी मान्यताऐं, उसका सूत्र तथा उसके प्रयोग से प्रायिकता ज्ञात करना।
3. संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय (Theorem of Total Probability)
4. बेज - प्रमेय (Baye's Theorem)

5.2 यादृच्छिक चर अथवा दैव चर (Random Variable)

दैव चरः एक चर जिसके विभिन्न मान हो सकते हों तथा पहले से यह बताना सम्भव न हो कि चर का कौन सा मान घटित होगा, ऐसे चर को दैव चर कहते हैं। प्रत्येक मान के घटित होने की प्रायिकता होती है। तथा सभी प्रायिकताओं का योग एक के बराबर होता है।

उदाहरण (अ) दो सिक्कों के उछाला गया। इस प्रयोग में चित्त की संख्या (x) को दैव चर कहा जायेगा तथा यदि चर की प्रायिकता के साथ इस को चर की प्रायिकता बंटन कहा जायेगा।

चित्त की संख्या (x)	प्रायिकता
X_1 0	$^1/_4$ P_1
X_2 1	$^2/_4$ P_2
X_3 2	$^1/_4$ P_3

उदाहरण (ब) एक पासे को दो बार फेका गया तब संख्याओं के योग - (x) को दैव चर कहा जायेगा

संख्याओं का योग (x)	प्रायिकता
X_1 2	1/36 P_1
X_2 3	2/36 P_2
X_3 4	3/36 P_3
X_4 5	4/36 P_4
X_5 6	5/36 P_5
X_6 7	6/36 P_6
X_7 8	5/36 P_7
X_8 9	4/36 P_8
X_9 10	3/36 P_9
X_{10} 11	2/36 P_{10}
X_{11} 12	1/36 P_{11}

दैव चर की गणितीय प्रत्याशा (Mathematical Expectation of Random Variable)

उदाहरण (अ) में गणितीय प्रत्याशा $E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3$

$= 0x\ 1/4 + 1x2/4 + 2x1/4$

$= 1$

उदाहरण (ब) में गणितीय प्रत्याशा $E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 ....x_{11}P_{11}$

$= 2\ x\ 1/36 + 3\ x\ 2/36 + ...11x2/36 + 12\ x\ 1/36$

$= 7$

दैव चर की गणितीय प्रत्याशा उस चर का माध्य भी होता है।

इसी प्रकार इन उदाहरणों में प्रायिकता बंटन का प्रमाप विचलन (Standard Deviation) भी ज्ञात किया जा सकता है। जिस प्रकार आवृत्ति बंटन (Frequency Distribution) में प्रमाप विचलन का सूत्र प्रयोग किया जाता है उसी प्रकार प्रायिकता बंटन उस सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। (f के स्थान पर P का प्रयोग करते हैं।)

आवृत्ति बंटन का सूत्र	प्रायिकता बंटन का सूत्र
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f_i}\right)^2}$ $\sum f_i = n$	$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum Px^2}{\sum P_i}\right) - \left(\frac{\sum Px}{\sum P_i}\right)^2}$ $\sum P_i = n$ $\sigma = \sqrt{\left(\sum Px^2\right) - \left(\sum Px\right)^2}$

5.3 द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

द्विपद बंटन एक खण्डित (Discrete) बंटन है। द्विपद बंटन की मान्यतायें (Assumptions) निम्नलिखित हैं :

1. एक प्रयोग n बार दोहराया गया है प्रत्येक बार को अभिप्रयोग (trial) कहते हैं। n धनात्मक पूर्ण संख्या (positive integer) तथा परिमित होता है। सामान्यतः $n \leq 30$ होता है।
2. प्रत्येक अभिप्रयोग के केवल दो परिणाम सूचना (success) तथा असफलता (failure) होता है। सफलता के प्रायिकता को p द्वारा तथा असफलता की प्रायिकता को q द्वारा व्यक्त किया जाय तो $p + q = 1$ होता है।
3. प्रत्येक अभिप्रयोग की प्रायिकता एक समान रहती है।
4. प्रत्येक अभिप्रयोग दूसरे अभिप्रयोगों में स्वतंत्र होता है, तब n अभिप्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता :

$$P(r) = {}^nC_r (p)^r (q)^{n-r}$$

द्विपद बंटन के सभी पद यदि n अभिप्रयोग हो तो इस प्रकार होंगे।

$${}^nC_0 (p)^0 (q)^n + {}^nC_1 (p)^1 (q)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots {}^nC_r (p)^r (q)^{n-r} + \ldots\ldots {}^nC_n (p)^n (q)^0$$

तथा इन सभी पदों का योग 1 के बराबर होता है।

द्विपद बंटन में किसी भी प्रायकिता के आकलान के लिए n तथा p की आवश्यकता होती है। अतः इन को द्विपद बंटन के प्राचल (parameters) कहते हैं। द्विपद बंटन को इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

B (n,p)

द्विपद बंटन का माध्य :

$$\mu = n.p$$

द्विपद बंटन का प्रमाप विचलन :

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

उदाहरण : एक प्रश्न-पत्र में छः प्रश्न में 5 विकल्प दिये गये हैं जिनमें से केवल एक विकल्प सही है। छः प्रश्नों में से चार उत्तर सही होने की क्या प्रायिकता है?

हल : उत्तर सही होने की प्रायिकता = 1/5 = 0.2

उत्तर गलत होने की प्रायिकता = 4/5 = 0.8

$$n = 6, r = 4$$

$$\begin{aligned} P(r) &= {}^nC_r (p)^r (q)^{n-r} \\ &= {}^6C_4 (p)^4 (q)^{6-4} \\ &= 15\, x\, 0.0016 \times 0.64 \\ &= 0.01536 \end{aligned}$$

सामान्तर माध्य = n.p. = 6x.2 = 1.2 प्रमाप विचलन

उदाहरण : एक साथ आठ सिक्के उछाले जाते हैं। (अ) शून्य चित्त आने कि (ब) चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(अ) n = 8 , r = 0, p = 1/2

P(0) = ${}^8C_0 (1/2)^2 (1/2)^8 = 1 \times 1 \times 1/256 = 0.0039$

(ब) P(0) = ${}^8C_8 (1/2)^8 (1/2)^0 = 1 \times 1/256 \times 1 = 0.0039$

5.4 बेज-प्रमेय (Bayes' Theorem)

मान लीजिए कि दो थैले I और II दिए गए हैं। थैला I में 2 सफेद और 3 लाल गेंदे हैं और थैला II में 4 सफेद और 5 लाल गेंदें हैं। किसी एक थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। हम किसी एक थैले को चुनने की प्रायिकता 1/2 ज्ञात कर सकते हैं या किसी विशेष थैले (मान ले थैला I) में से एक विशेष रंग (मान ले सफेद) गेंद को निकालने की प्रायिकता भी ज्ञात कर सकते हैं। अन्य शब्दों में हम किसी विशेष रंग निकालने की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं, यदि हमें यह दिया गया हो कि गेंद कौन-से थैले से निकाली गई है। लेकिन क्या हम इस बात की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं कि गेंद किसी विशेष थैले (मान लें थैला-II) से निकाली गई है यदि हमें निकाली गई गेंद का रंग पता है? यहाँ हमें थैला-II के चुनने की प्रतिलोम (reverse)

प्रायिकता ज्ञात करनी है जबकि इसके बाद होने वाली घटना का हमें ज्ञान है। प्रसिद्ध गणितज्ञ जॉन बेज ने प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने की समस्या का समाधान सप्रतिबंध प्रायिकता के उपयोग द्वारा किया है। उनके द्वारा बनाया गया सूत्र 'बेज-प्रमेय' के नाम से जाना जाता है जो उनकी मृत्योपरांत 1763 में प्रकाशित हुआ था। बेज-प्रमेय के कथन व प्रमाण से पूर्व आइए एक परिभाषा और कुछ प्रारंभिक परिणामों पर विचार कीजिए।

बेज-प्रमेय (Bayes' Theorem) यदि $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ अतिरिक्त घटनाएँ हैं जो कि प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S$ और A और कोई ऐसी घटना है जिसकी प्रायिकता शून्येतर है, तो

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\, P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, P(A|E_j)} \quad i = 1,2,3\ldots..n$$

13.5.1 एक प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन (Partition of a sample space)

घटनाओं $E_1\, E_2 \ldots.E_n$ के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि के विभाजन को निरूपित करता है यदि

(a) $E_i \cap E_j = \phi i \neq j, i, j = 1,2,3\ldots\ldots n$

(b) $E_1 \cap E_2 \cup \ldots \cup E_n - S$ तथा

(c) $P(Ei) > 0$, प्रत्येक $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ के लिए दूसरे शब्दों में, घटनाएँ $E_1\, E_2 \ldots.E_n$ प्रतिदर्श समष्टि के विभाजन को निरूपित करती हैं यदि वे युग्मतः असंयुक्त हैं, समग्र हैं तथा उनकी प्रायिकता शून्येत्तर हैं।

उदाहरणतः हम देखते हैं कि कोई घटना E और उसकी पूरक घटना प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन है क्योंकि $E \cap E' = \phi$ और $E \cup E' = S$.

यदि E और F किसी प्रतिदर्श समष्टि S. के संगत कोई दो घटनाएँ हैं, तो $\{E \cap F, E \cap F_2\}$ समुच्चय E का एक विभाजन हैं।

समुच्चय $\{E' \cap F, E \cap F, E \cap F'\}$ समुच्चय $E \cup F$ का एक विभाजन है और समुच्चय $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F',\}$ सम्पूर्ण प्रतिदर्श S का एक विभाजन है।

5.4.1 संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय (Theorem of Total Probability)

मान लें $\{E_1\, E_2 \ldots.E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S, का एक विभाजन है और मान लें कि प्रत्येक घटना $E_1\, E_2 \ldots.E_n$ की प्रायिकता शून्येत्तर है। मान लीजिए A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है, तब

उदाहरण 1: किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए कि 'निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने' की घटना को A और 'हड़ताल होने' की घटना को B द्वारा निरूपित किया जाता है। हमें P(A) ज्ञात करना है। हमें ज्ञात है कि

$P(B) = 0.65$, P (हड़ताल नहीं) $= P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$

$P(A|B) = 0.32,\ P(A|B2) = 0.80$

क्योंकि घटनाएँ B और B' समष्टि समुच्चय के विभाजन हैं इसलिए संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय द्वारा $= P(B).\, P(A|B) + P(B')\, P(A|B')$

$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$

$= 0.208 + 0.28 = 0.4888$

अतः निर्माण कार्य समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता 0.488 है।

उदाहरण 2: दो थैले I और II दिए हैं थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदे हैं जबकि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदे हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैल II से निकाली गयी है?

हलः थैले I का चयन होना को E_1 से और थैले II के चयन को E_2 मान लीजिए। मान लीजिए कि लाल रंग की गेंद निकालने की घटना को A से निरूपित करते हैं।

तब $P(E_1) = P(E_2) = 1/2$

साथ ही $P(A|E_1) = P$ (थैले I में से लाल रंग की गेंद निकालना) = 3/7

और $P(A|E_2) = P$ (थैले II में से लाल रंग की गेंद निकालना) = 5/11

अब थैले II में से गेंद निकालने की प्रायिकता, जबकि यह ज्ञात है कि वह लाल रंग की है = $P(E_2|A)$,

बेज-प्रमेय द्वारा

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)\,P(A|E_2)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

उदाहरण 3ः तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहाँ प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के हैं, डिब्बे II में दोनों सिक्के चाँदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चाँदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है?

हलः मान लें E_1, E_2 और E क्रमशः डिब्बे और के चयन को निरूपित करते हैं तब

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/3$

साथ ही मान लें A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $P(A|E_1) = P$ (डिब्बे I से सोने का सिक्का निकालना) = 2/2 = 1

$P(A|E_2) = P$ (डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकालना) = 0

$P(A|E_3) = P$ (डिब्बे III से सोने का सिक्का निकालना) = 1/2

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता = निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता = $P(E_1/A)$

अब बेज-प्रमेय द्वारा

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 4ः मान लें कि एक एच.आई.वी. परीक्षण की विश्वसनीयता निम्नलिखित प्रकार से निर्दिष्ट की गई है। एच.आई.वी. पोजीटिव व्यक्तियों के लिए परीक्षण 90% पता लगाने में और 10% पता न लगाने में सक्षम है। एच.आई.वी. से स्वतंत्र व्यक्तियों के लिए परीक्षण, 99% सही पता लगाता है यानी एच.आई.वी. नेगेटिव बताता है जबकि 1% परीक्षित व्यक्तियों के लिए एच.आई.वी. पोजीटिव बताता है। एक बड़ी जनसंख्या, जिसमें 0.1% व्यक्ति एच.आई.वी. ग्रस्त है, में से एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और उसका परीक्षण किया जाने पर रोग विज्ञानी एच.आई.वी. की उपस्थिति बताता है। क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में एच.आई.वी पोजीटिब है?

हलः मान लें E चुने गए व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की घटना और A व्यक्ति के एच.आई.वी. परीक्षण में पोजीटिव होने की घटना को दर्शाते हैं। हमें $P(E|A)$ ज्ञात करना है। साथ ही E' चुने गए व्यक्ति के एच.आई.वी. पोजीटिव न होने की घटना को दर्शाता है।

स्पष्टतया {E, E'}जनसंख्या में सभी व्यक्तियों के प्रतिदर्श समष्टि का एक विभाजन है। हमें ज्ञात है

$P(E) = 0.1\% = 0.1/100 = 0.001$

$P(E) = 1 - P(E) = 0.999$

$P(A|E) = P$ (व्यक्ति का परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव है) = 90% = 9/10 = 0.9

और $P(A|E_2) = P$ (व्यक्ति का परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जब कि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव नहीं है) = 1% = 0.01

अब बेज-प्रमेय द्वारा

$$P(E|A) = \frac{P(E)\,P(A|E)}{P(E)\,P(A|E) + P(E')\,P(A/E')}$$
$$-\frac{0.001\times 0.9}{0.001\times 0.9 + 0.999\times 0.01\times 0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083$$

अतः एक यादृच्छया चुने गए व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की प्रायिकता जब कि ज्ञात है कि उसका एच.आई.वी. परीक्षण पोजीटिव है, 0.083 है।

उदाहरण 5ः एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीनें यंत्राद्ध A, B और C कुल उत्पादन

का क्रमशः 25%, 35% और 40% बोल्ट बनाती है। इन मशीनों के उत्पादन का क्रमशः 5, 4, और 2 प्रतिशत भाग खराब त्रुटिपूर्ण हैं। बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है।

हलः मान लिया कि घटनाएँ B_1, B_2, B_3 निम्न प्रकार है :

B_1: बोल्ट मशीन A द्वारा बनाया गया है

B_2: बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है

B_3 : बोल्ट मशीन C द्वारा बनाया गया है

स्पष्ट है कि घटनाएँ B_1, B_2, B_3 परस्पर अपवर्जी और परिपूर्ण है। मान लिया कि घटना E निम्न प्रकार है : E बोल्ट खराब है। घटना E, घटनाओं B_1 या B_2 या B_3 के साथ घटित होती है। दिया है।

$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ P(B_2) = 0.35$ और $P(B_3) = 0.40$

पुनः $P(E/B_1)$ बोल्ट के खराब होने की प्रायिकता

जबकि दिया हो कि वह मशीन B द्वारा निर्मित है = 5% = 0.05

इसी प्रकार $P(E|B_2) = 0.04,\ P(E|B_3) = 0.02$

बेज-प्रमेय द्वारा हमें ज्ञात है कि

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)\,P(E|B_2)}{P(B_1)\,P(E|B_1) + P(B_2)\,P(E|B_2) + P(B_3)\,P(E+|B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02} = \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

उदाहरण 6: एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः 3/10, 1/5, 1/10 या 2/5 है यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः 1/4, 1/3, या 1/12 है, परंतु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए कि 'डॉक्टर के रोगी के यहाँ देर से आने' की घटना E है। यदि डॉक्टर के ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन द्वारा आने की घटनाएँ क्रमशः T_1,

T_2, T_3

और T_4 हो तो

$P(T_1) = 3/10, P(T2) = 1/5,\ P(T3) = 1/10$ और $P(T_4) = 2/5$ (दिया है)

$P(E|T_1)$ = डॉक्टर के ट्रेन द्वारा आने पर देर से पहुँचने की प्रायिकता = 1/4

इसी प्रकार, $P(E|T_2) = 1/3,\ P(E|T_3) = 1/12,\ P(E|T_4) = 0$ क्योंकि अन्य वाहन द्वारा अने पर उसे देरी नहीं होती। अब बेज-प्रमेय द्वारा

$P(T_1|E)$ = डॉक्टर द्वारा देर से आने पर ट्रेन द्वारा आने की प्रायिकता

$$= \frac{P(T_1)\,P(E|T_1)}{P(T_1)\,P(E|T_1) + P(T_2)\,P(E|T_2) + P(T_3)\,P(E|T_3) + P(T_4)\,P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता 1/2 है।

उदाहरण 7: एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाले संख्या वास्तव में 6 है।

हलः मान लीजिए कि E 'व्यक्ति द्वारा पासे को उछाल कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है' की घटना है। मान लीजिए कि S_1, पासे पर संख्या 6 आने की घटना और S_2 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना है। तब

$P(S_1)$ = संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता = 1/6

$P(S_2)$ = संख्या 6 नहीं आने की घटना की प्रायिकता = 5/6

$P(E|S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे कि संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता = व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता = 3/4

$P(E|S_2)$ व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता = व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता = 1−3/4 = 1/4

अब बेज-प्रमेय द्वारा

$P(S_1|E)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है।

$$= \frac{P(S_1)\,P(E|S_1)}{P(S_1)\,P(E|S_1) + P(S_2)\,P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता 3/8 है।

प्रश्नावली

1. यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$ और $P(B/A) = 1$, तब

(A) $A \subset B$ (B) B A (C) B = (C) A =

2. यदि $P(A/B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है।

(A) $P(B/A) < P(B)$ (B) P(A B) < P(A) P(B)

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

3. यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि

P(A) + P(B) - P(A और B) = P(A), तब

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$

$P(E \cup F|G) = P(E|G) + P(F|G) - P(E \cap F|G)$

5.5 सारांश

इस अभ्यास के मुख्य बिन्दु निम्न प्रकार से है।

घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि घटना F दी गयी है, निम्न प्रकार से ज्ञात की जाती है।

•

•

या $P(E \cap F) = P(F)\,(E|F), P(F) \neq 0$

- द्विपद बंटन एक खण्डित (Discrete) बंटन है, प्रत्येक अभिप्रयोग दूसरे अभिप्रयोगों से स्वतंत्र होता है, तब n अभिप्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता :

द्विपद बंटन के सभी पद यदि n अभिप्रयोग हो तो इस प्रकार होंगे

$${}^nC_0\,(p)^0\,(q)^n + {}^nC_1(p)^1(q)^{n-1} + \ldots {}^nC_r(p)^r(q)^{n-r} + {}^nC_n(p)^n(q)^0$$

तथा इन सभी पदों का योग 1 के बराबर होता है।

बेज-प्रमेय (Bayes' Theorem) यदि $E_1, E_2 \ldots E_n$ अतिरिक्त घटनाएँ हैं जो कि प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1, E_2 \ldots E_n$ युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ और A कोई ऐसी घटना है जिसकी प्रायिकता शून्येत्तर हैं, तो

$$P(E|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}\quad i = 1,2,3\ldots\ldots n$$

- **संपूर्ण प्रायिकता की प्रमेय (Theorem of Total Probability)**

मान लें $\{E_1, E_2 \ldots E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और मान लें कि प्रत्येक घटना $E_1, E_2 \ldots E_n$ की प्रायिकता शून्येतर है। मान लीजिए A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है, तब,

NOTES

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त
विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04
व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड

2

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण
(Theorecital Frequency Distribution)

लेखक

डॉ0 राजेश सिंह	असिस्टेन्ट प्रोफेसर, सांख्यिकीय विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010
मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड-2 परिचय

व्यवसायिक सांख्यिकी (M.Com.-04) पाठ्य क्रम पांच खण्डों में विभाजित किया गया है। खण्ड दो सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण (Theoretical Frequency Distribution) इस क्रम में द्वितीय है, जो दो इकाइयों में विभक्त है -

1. द्विपद बंटन एवं पायसन बंटन (Binoial Distribution and Poison Distribution)
2. प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)

इकाई-1 द्विपद बंटन एवं पायसन बंटन (Binomial Distribution and Poison Distribution)

इकाई की रूपरेखा

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- यादृच्छिक चर एवं प्रायिकता बंटन की धारणा को समझ सकेंगे
- द्विपद बंटन को समझ सकें,
- द्विपद बंटन के उपयोग का ज्ञज्ञन प्राप्त कर सकें,
- प्वायसन बंटन एवं उसके उपयोग को समझ सकें,

1.2 परिचय (Introduction)

समंकों का संकलन प्रथमतयः, अर्थात्, जब समंक पहली बार एकत्र किये जाते हैं, तो उनका स्वरूप सकलनकर्ता के व्यक्तिगत अवलोकन से प्रभावित रहता है। यह बिखरे अथवा तितर-बितर के रूप में रहते हैं। इस प्रकार के समंकों के कोई भी निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है। ऐसे समंकों को निष्कर्ष योग्य अथवा उपयोग योग्य बनाने के लिए इनको वर्गीकरण (Classification) किया जाता है।। वर्गीकरण से समंकों को निर्धारित मूल्यों अथवा समूह या वर्गान्तरों के अन्तर्गत प्रस्तुत किया जाता है। इसके उपरान्त समंक विभिन्न विश्लेषणों एवं निष्कर्षों के लिए उपलब्ध अथवा तैयार हो जाते हैं। इसे आवृत्ति वितरण (frequency distribution) कहा जाता है।

आवृत्ति वितरण के द्वारा संकलित समंकों को विभिन्न चरों (Variables) के अन्तर्गत प्रस्तुत किया जाता है। सामान्यतयः यह एक तालिका (Table) के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। जिसमें एक तरफ चर दिखाए जाते हैं और दूसरी ओर उन्हीं चरों के अन्तर्गत विभिन्न पद प्रस्तुत किये जाते हैं। इन्हीं प्रस्तुत पदों को हम आवृत्ति (frequency) के रूप में जानते हैं और प्रक्रिया को आवृत्ति वितरण कहते हैं।

(क) वास्तविक आवृत्तियों के अवलोकन एवं प्रयोग के पश्चात् विभिन्न संग्रहित करना, जिसे वास्तविक आवृत्ति वितरण (Actual frequency distribution) कहते हैं।

(ख) आवृत्तियों को विभिन्न गणितीय सम्बन्धों के आधार पर व्युत्पन्न अथवा प्राप्त करना, जिसे सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण (Theoratical frequency distribuition) कहते हैं।

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के अन्तर्गत, आवृत्तियों का वितरण, गणितीय विधियों के प्रयोग द्वारा अथवा पूर्व निर्धारित स्वीकृत मान्यताओं के आधार पर किया जाता है। इसके अन्तर्गत गणितीय रीतियों के प्रयोग द्वारा अपेक्षित अथवा प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कर ली जाती हैं। यह प्रक्रिया प्रायिकता के सिद्धान्त पर आधारित होती हैं। किसी दैव चर के मूल्य के लिए विभिन्न सम्मान्याताओं अथवा प्रायिकताओं का चुनाव करने की प्रक्रिया को प्रायिकता बंटन (वितरण) कहा जाता है। इस प्रकार के वितरण में सभी आवृत्ति (consequent) प्रायिकताओं का योग 1 (एक) आना चाहिए।

अतः हम कह सकते हैं कि ऐसे वितरण, जिन्हें गणितीय रीतियों द्वारा निगमित अथवा प्राप्त किया जाता है, को सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण अथवा प्रायिकता वितरण (theoretical or probability distribution) कहा जाता है।

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण द्वारा दी गई परिस्थितियों में आवृत्ति वितरण के स्वरूप को प्रस्तुत करके अनिश्चितताओं से बचा जा सकता है। विभिन्न प्रकार के विश्लेषणों में आवृत्ति वितरण से शोधकर्ता को सम्बन्धित विषयों में उचित निर्णय लेने में सहायता प्राप्त होती है। इसके द्वारा भावी घटनाओं का पूर्वानुमान सरलता एवं शुद्धता द्वारा किया जा सकता है। व्यवसाय एवं वाणिज्य से जुड़े विभिन्न मामलों में सैद्धान्तिक (प्रायिकता) आवृत्ति वितरण के आधार पर निष्कर्ष प्राप्त किया जा सकता है। सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण, गणितीय पद्धति पर आधारित होने के कारण वास्तविक वितरणों के

अति निकय होते हैं। इनका प्रयोग वास्तविक परिस्थितियों के वर्णन अथवा निर्वचन के लिये किया जाता है।

सैद्धान्तिक आवृत्ति के वितरण के प्रकार (Types of Theoretical Frequency Distribution)

सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरणों का द्विपद वितरण, काई वितरण, प्रसामान्य वितरण आदि के द्वारा अध्ययन किया जा सकता है। व्यवहारिकता के दृष्टिकोण से सैद्धान्तिक आवृत्ति वितरण के तीन प्रकार होते हैं -

(1) द्विपद वितरण (Binomial Distribution)

(2) पायसन वितरण (Poisson Distribution)

(3) प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution)

1.3 यादृच्छिक चर एवं प्रायकिता बंटन

यदि दो सिक्के उछाले जायें तो निम्नलिखित Out comes प्राप्त होंगे : {HH, HT, TH, TT} जहाँ H चित्त तथा T पट को दर्शाता है। यदि H की संख्या r से दर्शाई जाय तो ऊपर दिये गये प्रयोग में r की संभावित मूल्य होंगी 0, 1, 2 और प्रत्येक मूल्य की एक प्रायिकता होगी। प्रयोग के out comes पर आधारित यह वास्तविक चर r विभिन्न मूल्य धारणा करेगा और इसके प्रत्येक मूल्य की एक प्रायिकता होगी, ऐसे अनिश्चित वास्तविक चर r को यादृच्छिक चर कहते हैं। चर r के सभी संभावित मूल्यों का उनकी प्रायिकताओं के साथ प्रदर्शन चर का प्रायिकता बंटन कहलाता है।

चित्त संख्या का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित रूप में दर्शाया जाता है :

r	P(r)
o	$\frac{1}{4}$
1	
2	

जहाँ चर केवल असतत मान ही हो सकता हो तो ऐसे चर को असतत यादृच्छिक चर कहते हैं और संबंधित बंटन को असतत प्रायिकता बंटन कहते हैं।

यदि हम तीन सिक्के उछाले और चित्त पड़ने वाले सिक्कों की संख्या r से प्रदर्शित करें तो का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया जायेगा :-

r	P(r)
o	
1	
2	
3	

सतत यादृच्छिक चर :

यदि अन्तराल [0 1] से कोई बिन्दु चुना जाय और उस बिन्दु की दूरी, मूल बिन्दु से X द्वारा दर्शाई जाय तो X एक सतत यादूच्छिक चर कहलाता है। यदि किसी सतत यादृच्छिक चर X से संबंधित एक फलन हो जिससे।

तो सतत चर X का प्रायिकता घनत्व फलन कहलाता है। यदि चर X का विस्तार [a,b] हो, तो

माध्य एवं प्रसरण :

किसी असतत चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

x	:	x_1	x_2	x_3	....	x_n
P(x)	:	p_1	p_2	p_3	....	p_n

चर की प्रत्याशा निम्नलिखित रूप से परिभाषित की जाती है:

$$E(x) = \sum_{c=1}^{n} x_i \; p_i$$

$E(x)$ चर का माध्य कहलाता है।

चर का प्रसरण निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता हैः

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

$$= E(x^2) - [E(x)]^2$$

यदि किसी सतत् यादृच्छिक चर का प्रायिकता घनत्व फलन हो तो इसके माध्य एवं प्रसरण निम्नलिखित रूप में परिभाषित किये जाते हैंः

माध्य $= E(x) = \int_a^b x\, f(x)\, dx, a \le x \le b$

$$V(x) = \int_a^b [x - E(x)]^2 f(x) dx$$

$$= \int_a^b x^2 f(x) dx - [E(x)]^2$$

असतत प्रायिका बंटन

1.3.1 बर्नौली बंटन

यदि किसी प्रयोग में केवल दो परस्पर अपवर्जी परिणाम हों तो एक को सफलता तथा दूसरे को असफलता कहेंगे। मानाकि सफलता प्राप्त होने की प्रायिकता p है तो असफलता की प्रायिकता $q = 1\text{-}p$ होगी। यदि x सफलता की संख्या हो तो x का बंटन बर्नौली बंटन कहलाता है। x को बर्नौली चर कहते हैं। x का बंटन निम्नलिखित रूप में दर्शाया जायेगा।

X	p(x)
O	q
1	p

चर X का मान O होगा यदि असफलता प्राप्त होगी और X का मान 1 होगा यदि सफलता प्राप्त होगी।

उदाहरणः यदि एक सिक्का उछाला जाय तो दो संभावित परिणाम होंगे। (i) सिक्का चित्त गिरेगा या (ii) सिक्का पट गिरेगा।

यदि चित्त गिरने को सफलता माना जाय और पट गिरने को असफलता माना जाय तो सफलताओं की संख्या का मान होगा O और 1,

$$P(x = o) = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1) = \frac{1}{2}$$

और चर का बंटन बर्नौली बंटन होगा।

1.3.2 द्विपद् बंटन

एक यादृच्छिक प्रयोग में दो संभव परिणाम सफलता तथा असफलता हैं। मानाकि -p सफलता की प्रायिकता है और असफलता की प्रायिकता $q = 1\text{-}p$ है। यदि इस प्रयोग को बार दोहराया जाय और सफलताओं की r संख्या हो तो के बंटन को द्विपद बटन कहते हैं और r को द्विपद चर कहते हैं।

द्विपद बंटन की निम्नलिखित संकल्पनायें हैं :

1. सभी बर्नौली प्रयास स्वतंत्र होते हैं :
2. प्रत्येक प्रयास के पारस्परिक अपवर्जी परिणाम दो होते हैं। एक सपलता और दूसरा असफलता।
3. सभी प्रयासों में सफलता की प्रायिकता स्थिर रहती है।
4. प्रयासों की पुनरावृत्ति समान स्थितियों में की जाती है।
5. प्रयासों की संख्या निश्चित होती है।

उदाहरण :

यदि प्रयोग एक बार किया जाय तो परिणाम होंगे $\{F, S\}$ यदि r सफलताओं की संख्या हो तो r का बंटन होगा :

r	P(r)
O	q
1	p

यदि प्रयोग दो बार किया जाय तो परिणाम होंगे : {FF, FS, SF, SS}

r का बंटन होगा

r	P(r)

O	q^2
1	$2qp$
2	p^2

यदि n बर्नौली प्रयासों में सफलताओं की संख्या r से दर्शायी जाय तो

$$P(r) = {}^nC_r \, p^r q^{n-r}, \; r = 0, 1, 2, ... n$$

$$\text{Where } {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n प्रयासों में सफलताओं की संख्या के बंटन को द्विपद बंटन कहते हैं और r को द्विपद चर कहते हैं।

माध्य = E (r)

$$= \sum_{r=0}^{n} r\,P(r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0} r \frac{n(n-1)!}{r\,(r-1)!(n-r)} p^r q^{n-r}$$

$$= \sum n \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$= np \sum \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1} q^{n-r}$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

प्रसरण $= E\,[r - E\,(r)]^2$

$$= E\,(r^2) - [E(r)]^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2 \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} - n^2p^2$$

$$= npq + n^2p^2 - n^2p^2$$

$$= npq$$

उदाहरण :

छह पासे 729 बार फैंके गये। कम से कम तीन पासों द्वारा पाँच या छह दिखाने की प्रत्याशित आवृत्ति क्या होगी ?

हल :

एक पासे द्वारा पाँच या छह प्राप्त करने की सम्भावना -

$p = \frac{2}{6}$ या होगी।

अतः होगी।

उदाहरण में छह पासे दिए हुए हैं तथा इन्हें 729 बार फेंका गया है,

अतः द्विपद विस्तार निम्न प्रकार होगा -

कम से कम तीन पासों द्वारा पाँच या छह दिखाने की प्रत्याशित आवृत्ति

$$= 729\left[{}^6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}^6C_4\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}^6C_5\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5 + {}^6C_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\right]$$

$$= \frac{729}{3^6}\left[\frac{6\times5\times4\times2^3}{3\times2} + \frac{6\times5\times2^2}{2\times1} + \frac{6\times2}{1} + 1\right]$$

$$= \frac{729}{729}[160 + 60 + 12 + 1]$$

= 233 होगी।

उदाहरण :

भारत के किसी क्षेत्र में 4 बच्चों वाले 4,096 परिवार यादृच्छिक रूप में चुने गये जिनके लिए लड़का पैदा होने की प्रायिकता 1/2 है। परिवार में 0,1,2,3 तथा 4 लड़के होने की प्रायिकता ज्ञात करते हुए 4,096 परिवारों का प्रत्याशित विवरण ज्ञात कीजिए। समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन की गणना भी कीजिए।

हल :

मानता $x = 4$ बच्चों वाले परिवार में लड़कों की संख्या

तब $x = x : 0, 1, 2, 3, 4$

माना $p =$ एक लड़का पैदा होने की प्रायकिता $= \frac{1}{2}$

$q =$ एक लड़का पैदा न होने की प्रायिकता $=$

$n = 4$, परिवार में बच्चों की संख्या

$N = 4096$ परिवारों की संख्या

संगत प्रत्याशित आवृत्ति $N.(q+p)^n = 4096\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4$ के प्रसार से प्राप्त होगी :

$$4096\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4 = 4096\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{10}+\frac{1}{16}\right)$$
$$= 256 + 1024 + 1536 + 1024 + 256$$

$p(x = x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots,n$ $\frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट सैद्धान्तिक द्विपद वितरण है :

बच्चों की संख्या	**परिवारों की संख्या**
(x)	(f)
0	256
1	1024
2	1536
3	1024
4	256
योग	4096

सूत्र के अनुसार, समान्तर माध्य

$M = n.p. = 4 \times 1/2 = 2$ $= \frac{1}{2}$

प्रमाप विचलन , $\sigma = \sqrt{npq}$

$$= \sqrt{4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

उदाहरण -

यह मानते हुए कि आधी जनसंख्या शाकाहारी है, अतः किसी व्यक्ति के शाकाहारी होने की सम्भावना है, और यह भी मानते हुए कि 100 अन्वेषकों में से प्रत्येक 10 व्यक्तियों का प्रतिदर्श उनसे यह पूछता है कि वे शाकाहारी हैं या नहीं, तो कितने अन्वेषक यह रिपोर्ट करेंगे कि तीन या इससे कम लोग शाकाहारी हैं?

हल : सफलता (p) तथा असफलता (q) की सम्भावना

द्विपद विस्तार

$$=\left[p^{10}+10p^9q+45p^8q^2+120p^7q^3+210p^6q^4+252p^5q^5+\right.$$
$$\left.210p^4q^6+120p^3q^7+45p^2q^8+10pq^9+q^{10}\right]$$

0,1,2 और 3 के लिए यह -

$$p^{10}+10p^9q+45p^8q^2+120p^7q^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+10\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)+45\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2+120\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(1+10+45+120)$$

100 अन्वेषकों के लिए

$$=100\left(\frac{1}{2}\right)^{10}(1+10+45+120)$$
$$=17.19 = 17 \text{ Approx.}$$

अर्थात् 17 अन्वेषक यह रिपोर्ट करेंगे कि तीन या इससे कम व्यक्ति शाकाहारी हैं।

1.3.3 प्वायसन बंटन

द्विपद बंटन में r प्रयासों में सफलतायें पाने की प्रायिकता

$p(r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$ होती है। यदि p का मान बहुत कम हो तथा n का मान बहुत अधिक हो परन्तु np का मान परिमित अचर हो (माना $np = m$) तो द्विपद बंटन में $p(r) \to e^{-m}\frac{m^r}{r!}$ जब

मानाकि x एक असतत यादृच्छिक चर है जिसके मान r ग्रहण करने की प्रायिकता

$$P(x=r)=e^{-m}\frac{m^r}{r!},\ r=0,1,2,\ldots\ldots$$

द्वारा व्यक्त की जा सकती हो तो x के प्रायिकता बंटन को प्वॉयसन बंटन कहते हैं जहाँ m इसका प्राचल है। प्वॉयसन बंटन उन परिस्थितियों में लागू होता है जहाँ घटना घटने की प्रायिकता बहुत कम होती है।

प्वॉयसन चर के उदाहरण :

1. किसी वर्ष किसी महामारी से मरने वालों की संख्या।
2. किसी अनुभवी टाइपिस्ट द्वारा प्रति पृष्ठ की गई त्रुटियों की संख्या।
3. ब्लेड के पैकेट में दोषपूर्ण ब्लेडों की संख्या।
4. किसी नगर में प्रतिदिन होने वाली आत्महत्याओं की संख्या।
5. किसी पुस्तक के प्रति पृष्ठ पर मुद्रित गलतियों की संख्या।

प्वॉयसन बंटन के माध्य तथा प्रसरणः

माध्य = m

प्रसरण = m

उदाहरण : किसी उत्पादन का निरीक्षण करने पर प्रति इकाई 2 दोष पाए जाते है। प्वॉयसन बंटन का उपयोग करते हुए बिना किसी दोष, 3 दोष या 4 दोष वाली इकाइयों के पाए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (दिया है $e^{-2}=0.135$)

हल : माना x = प्रति इकाई दोषों की संख्या

तथा $p(x)=p\left(x=x\right)=e^{-m}\frac{m^x}{x!},\quad x=0,1,2,\ldots,\infty$

यहाँ $m=2$

$p_{(0)}=e^{-2}=0.135$

$p_{(1)}=p_{(0)}\times m=1.35\times 2=0.27$

$p_{(2)}=p_{(1)}\times\frac{m}{2}=0.27\times\frac{2}{2}=0.27$

$p_{(3)}=p_{(2)}\times\frac{m}{3}=0.27\times\frac{2}{3}=0.18$

$p_{(4)}=p_{(3)}\times\frac{m}{4}=0.27\times\frac{2}{4}=0.9$

इस प्रकार,

कोई भी दोष न पाये जाने की प्रायिकता = $p_{(0)}=0.135$

तीन दोष पाये जाने की प्रायिकता = $p_{(3)}=0.18$

चार दोष पाये जाने की प्रायिकता = $p_{(4)}=0.9$

उदाहरण : एक कम्पनी बिजली के बल्ब बनाती है। बल्ब के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। 500 बल्बों के एक लदान में 5 दोषपूर्ण बल्ब होने की क्या प्रायिकता है?

हल : माना x, 500 बल्बों के एक लदान में दोषपूर्ण बल्बों की संख्या

$n=500,\ p=0.02$

अतः $m=np=500\ x\ 0.02=10$

तथा $p(x)=p(x=x)=e^{-m}\frac{m^x}{x!},\ x=0,1,\ldots,\infty$

अभीष्ट प्रायिकता $=p_{(5)}=e^{-10}\frac{10^5}{5!}$

$=0.0375$

उदाहरण : एक पिन निर्माता जानता है कि उसके उत्पादन का 5% दोषपूर्ण होता है। वह पिनों को 100-100 के पैकिटों में बेचता है तथा यह गारण्टी देता है कि पैकिट में 4 से अधिक दोषपूर्ण पिन नहीं है। इसकी क्या प्रायिकता है कि प्रत्येक पैकिट गारण्टी की पुष्टि करेगा?

हल : दोषपूर्ण पिन होने की प्रायिकता, $p=5\%$ या 0.05

माना x, 100 पिनों के पैकिट में दोषपूर्ण पिनों की संख्या $p=0.05$ तथा $n=100$

तथा

$p_{(1)}=p_{(0)}\times\frac{m}{1}=0.0067\times\frac{5}{7}=0.0335$

$$p_{(2)} = p_{(1)} \times \frac{m}{2} = 0.0335 \times \frac{5}{2} = 0.0838$$

$$p_3 = p_{(2)} \times \frac{m}{3} = 0.0834 \times \frac{5}{3} = 0.1397$$

$$p_{(4)} = p_{(3)} \times \frac{m}{4} = 0.1397 \times \frac{5}{4} = 0.1746$$

p (पैकिट गारण्टी की पुष्टि करेगा)

= p (4 से अधिक दोषपूर्ण पिन न हों)

$$= 1 - \left[p_{(0)} + p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)} + p_{(4)}\right]$$

$$= 0.5617$$

उदाहरण : कार किराये पर देने वाली एक संस्था के पास दो कारें हैं जिन्हें वह प्रति दिन किराये पर देती हैं। प्रतिदिन एक कार के लिए मांगों की संख्या प्वॉसन बंटन के आधार पर वितरित है जिसका माध्य 1.5 है। उन दिनों का अनुपात ज्ञात कीजिए। जब (i) कोई भी कार प्रयोग न की गई हो और (ii) जब कुछ मांग को अस्वीकार करना पड़े।

हल : माना x, कार की मांग

तब $p(x = x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}$, जहाँ $m = 1.5$

(i) कोई भी कार प्रयोग न की गयी का अर्थ है मांग शून्य है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता =

$$p(x = 0) = e^{-m} = e^{-1.5} = 0.2231$$

(ii) मांग अस्वीकार करने का अर्थ है, मांग 2 से अधिक हो

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता =

$$p(x > 2) = 1 - p(x \le 2)$$

$$= 1 - \left[p_{(0)} + p_{(1)} + p_{(2)}\right]$$

$$= 1 - \left[e^{-m} + e^{-m}.m + e^{-m}.\frac{m^2}{2}\right]$$

$$= 1 - \left[0.2231 + 0.2231 \times 1.5 + (0.2231) \times \frac{(1.5)^2}{2}\right]$$

$$= 1 - 0.8087$$

$$= 0.1913$$

1.4 बोध प्रश्न

1. सैद्धान्तिक वितरण का क्या अर्थ है। द्विपद बंटन का वर्णन कीजिए।
2. द्विपद वितरण पर उन दशाओं जिनमें वह उत्पन्न होता है तथा उसकी प्रमुख विशेषताओं का वर्णन करते हुए एक टिप्पणी लिखिए।
3. प्वायसन बंटन की परिभाषा दीजिए एवं उसके प्रमुख लक्षणों को स्पष्ट कीजिए।
4. द्विपद बंटन कब प्वायसन बंटन की ओर प्रवृत्त होता है? आप किन परिस्थितियों में द्विपद वितरण के स्थान पर प्वायसन बंटन का प्रयोग करेंगे?

इकाई-2 सामान्य बंटन (Normal Distribution)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- प्रसामान्य बंटन की धारणा एवं उपयोगिता का ज्ञान प्राप्त कर सकें,
- प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल देखने की विधि का ज्ञान प्राप्त कर सकें।

2.1 परिचय

असतत दैव चरों के वितरण में द्विपद एवं पायसन वितरण उपयोगी होते हैं। सतत दैव चरों के वितरण को प्रसामान्य (प्रायिकता) वितरण कहा जाता है। प्रसामान्य वितरण विभिन्न मान्यताओं पर आधारित होता है जो निम्न है -

(i) घटना को प्रभावित करने वाले कारक स्वतन्त्र हैं

(ii) घटना अनेक कारकों से प्रभावित हो सकती हैं, प्रत्येक का महत्व समान होता है।

(iii) अधिकतम आवृत्तियां समान्तर माध्य के सन्निकट होती हैं।

(iv) कारकों का प्रभाव भिन्न घटनाओं पर भिन्न-भिन्न होत है।

2.2 प्रसामान्य बंटन :

प्रसामान्य बटन एक सतत बंटन है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया जाता है :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, -\infty<x<\infty.$$

यहाँ m और σ^2 इसके प्राचल हैं।

माध्य एवं प्रसरण :

माध्य $= E(x) = m$

प्रसरण $= V(x) = \sigma^2$

यदि x एक प्रसामान्य चर हैं जिसका माध्य m एवं प्रसरण σ^2 है तो $z=\frac{x-m}{\sigma}$ एक प्रसामान्य चर होगा जिसका माध्य शून्य एवं प्रसरण एक होगा। ऐसे चर z को मानक प्रसामान्य चर कहते हैं और इसके बंटन को मानक प्रसामान्य बंटन कहते हैं जिसका प्रायिकता घनत्व फलन निम्नलिखित रूप से दर्शाया जाता हैः

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{z}}, -\infty<z<\infty$$

यदि p सफलता की प्रायिकता वाले n प्रयासों से प्राप्त r एक द्विपद चर हो तो $\frac{r-np}{\sqrt{npq}}$ का बंटन एक मानक प्रसामान्य बंटन होगा जब और p अत्यधिक छोटा न हो। इसीलिये कहा जाता है कि यदि p अत्यधिक छोटा न हो और n का मान अत्यधिक हो तो द्विपद् बंटन प्रसामान्य बंटन की तरफ अग्रसित होता है।

(i) प्रसामान्य वक्र एक सतत वक्र होता है।

(ii) प्रसामान्य वक्र पूर्णरूप से सममित होता है। यह वक्र घण्टी के आकार का हो, होता है। यदि शीर्ष बिन्दु से आधार रेखा पर लम्ब डाला जाय तो यह लम्ब वक्र के क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करेगा। यदि इसके एक ओर के आधे भाग को मोड़ा जाय तो यह दूसरे आधे भाग को पूर्णतःढक लेगा।

(iii) पूर्ण सममित बंटन होने के कारण इस बंटन में माध्य = माध्यिका = बहुलक

(iv) यह एक ही भूयिष्ठक वाला होता है क्योंकि इसके वक्र में अधिकतम ऊँचाई एक ही स्थान पर होती है।

(v) इस वक्र के दोनों सिरे एक ही प्रकार से दोनों ओर बढ़ते हैं। वे आधार रेखा के निकटतम होते जाते हैं पर उनका स्पर्श नहीं करते। वक्र दोनों दिशाओं में अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

यदि f(x) एक मानक प्रसामान्य बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन वक्र है तो

इस बंटन का अत्याधिक उपयोग होता है। किन्ही दो बिन्दुओं के बीच वक्र का क्षेत्रफल जानने की आवश्यकता पड़ती है अतः क्षेत्रफल के लिये सारिणी बनी हुई है जिसकी हम सहायता लेते हैं। सारिणी में 0 से किसी बिन्दु a के बीच का क्षेत्रफल दिया होता है।

2.2 क्षेत्रफल देखने की विधि :

क्षेत्रफल देखने के लिए प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल नामक सारणी में पहला खाना z अर्थात् $\frac{z}{\sigma}$ का होता है। इसमें 0.0 से 3.0 तक के मूल्य लिखे रहते हैं। इससे आगे समानान्तर .00 से .09 तक के 10 खाने होते हैं जिनमें मूल्य के क्षेत्रफल दिये होते हैं। यदि z का मूल्य 1.45 है तो क्षेत्रफल 1.4 की सीध में .05 वाले खाने में देखेंगे जहाँ .4265 दिया हुआ है। अतः 0 से 1.45 के बीच वक्र का क्षेत्रफल .4265 है।

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} f(z)\,dz = 0.5$$

$$p(a \le z \le b) = \int_{a}^{b} f(z)\,dz$$

$$\int_{0}^{a} f(z)\,dz = \int_{-a}^{0} f(z)\,dz$$

$$\int_{0}^{1.45} f(z)\,dz = .4265$$

दो बिन्दु a और b के बीच का क्षेत्रफल

$$\int_{a}^{b} f(z)\,dz = \int_{0}^{b} f(z)\,dz - \int_{0}^{a} f(z)\,dz$$

जानने के लिये 0 से b का क्षेत्रफल में से 0 से a का क्षेत्रफल घटाना होगा।

निम्नलिखित तथ्यों को ध्यान में रखते हुए किसी भी वांछित क्षेत्रफल को प्राप्त किया जा सकता है :

$$(i)\ \int_{-\infty}^{0} f(z).dz = \int_{0}^{\infty} f(z).dz = 0.5$$

$$(ii)\ \int_{-a}^{0} f(z).dz = \int_{0}^{a} f(z)\,dz$$

$$(iii)\ \int_{-\infty}^{-a} f(z).dz = \int_{a}^{\infty} f(z).dz$$

$$(iv)\ \int_{a}^{\infty} f(z).dz = 0.5 - \int_{0}^{a} f(z)\,dz$$

उदाहरण : एक कारखाने में कार्यरत श्रमिकों के वर्ग विशेष की माध्य मजदूरी 285 रु. तथा प्रमाप विचलन 50 रु. है। ज्ञात कीजिए कि 200 रु. से अधिक मजदूरी पाने वाले श्रमिकों का प्रतिशत क्या होगा।

हल :

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma} \quad (x = 200, \overline{x} = 285, \sigma = 50)$$

$$= \frac{200 - 285}{50} = -1.7$$

जब $z = -1.7$ है तो यह 0.4554 क्षेत्र को व्यक्त करता है।

कुल क्षेत्रफल = .5 + .4554 = .9554 क्षेत्र = 95.54% अर्थात् 95.54% श्रमिक 200 रु. से अधिक मजदूरी प्राप्त करते हैं।

उदाहरण : 2000 वस्तुओं के एक न्यादर्श का माध्य भार 25 औंस तथा प्रमाप विचलन 5 औंस है। 20 से 30 औंस के मध्य कितनी वस्तुऐं पायी जाएंगी?

हल :

$$z_{20} = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{20 - 25}{5} = -1$$

$$z_{30} = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{30 - 25}{5} = -1$$

$\pm\sigma$ के मध्य पाया जाने वाला कुल क्षेत्र

$= 0.34134 \text{ x } 2 = 0.682\ 68$

20 से 30 औंस के मध्य पायी जाने वाली वस्तुएँ

$= 0.68268 \times 2000$

$= 1365.36$ या 1365

अर्थात् 1365 वस्तुओं का भार 20 से 30 औंस के मध्य होगा।

उदाहरण :

डी.सी.एम. रिटेल स्टोर की प्रति माह औसत बिक्री 10,500 रु. है और प्रमाप विचलन 2050 रु. है। सभी स्टोरों के किस अनुपात की बिक्रि 10,500 रु. तथा 12550 रू. के बीच में रही?

हल :

दिया हुआ है :

$\bar{x} = 10{,}500, \quad \sigma = 2050$ तथा $x = 12.550.$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{12550 - 10500}{2050} = 1.0$$

$\therefore$ 1.0 पर प्रसामान्य वक्र सारणी क्षेत्र है 0.3413

10,500 और 12550 के बीच में बेचने वाले रिटेल स्टोरों का प्रतिशत

$= 0.3413 \times 100 = 34.13$

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04
व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड
3
प्रतिदर्शन (Sampling)

लेखक

डॉ0 मनीष कुमार सिनहा	एसो0 प्रोफेसर, सी0एम0पी0 डिग्री कालेज, सम्बद्ध इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010
मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड-3 परिचय-

उद्यमियों, प्रबन्धकों, विद्ववतजनों, एवं शोधार्थियों को शोध प्रक्रिया के विभिन्न आयामों का सम्पूर्ण ज्ञान होना आवश्यक है। प्रस्तुत खण्ड - प्रतिदर्शन (Sampling) इसी विषयवस्तु पर मुख्य रूप से केन्द्रित है। प्रस्तुत खण्ड व्यवसायिक सांख्यिकी (Business Statistics) M.Com.-04, के पाँच खण्डों के क्रम में तीसरा है, जो चार इकाइयों में विभक्त है –

(1) प्रतिदर्शन एवं समंकों का संग्रहण (Sampling and Data Collection)

(2) प्रतिदर्शन वितरण (Sampling Distribution)

(3) समकों का संग्रहण एवं प्रविधि (Data Collection and Technique)

(4) सांख्यिकीय अनुमान (Statistical Estimation)

इकाई - 1 : प्रतिदर्शन एवं समंकों का सग्रंहण
(Sampling and Data Collection)

इकाई की रूपरेखा-

1.1 : उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप–

- समष्टि जनसंख्या तथा प्रतिदर्श का अर्थ एवं शोध कार्यों में उनके महत्व का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे।
- शोध के निष्कर्ष वैज्ञानिक एवं विश्वसनीय रूप से प्राप्त हो इसके लिये समकों को चयन करने की उपयुक्त विधि का निर्धारण कर सकेंगे।

- प्राचल एवं सांख्यिकीय का ज्ञान प्राप्त करेंगे।
- प्रतिदर्श चयन का औचित्य एवं उपयोगिता तथा प्रतिदर्श के विभिन्न नियम एवं सिद्धान्त की जानकारी प्राप्त कर सकेंगें।
- प्रतिदर्श के प्रारूप को बनाने की विधि का निर्धारण कर सकेंगें।
- प्रतिदर्शन की त्रुटियाँ एवं गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियों के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगें।
- यह ज्ञात कर पाएगें कि सांख्यिकी विशय केवल गणनाओं का एक गणितीय विषय नहीं है वरन् शोध प्रक्रिया को वैज्ञानिक रूप से सम्पादित करने का एक साधन है।

1.2 परिचय (Introduction)

वैज्ञानिक प्रक्रिया से सम्पादित किये जाने वाले किसी शोध अथवा अन्वेषण में इस पर बल दिया जाता है कि विषय वस्तु के विभिन्न गुणों अथवा विशेषताओं का अध्ययन किया जाय। जब तक शोध अथवा अन्वेषण की विषयवस्तु का सम्पूर्ण अध्ययन न कर लिया जाय तब तक प्रमाणिक रूप से किसी निष्कर्ष पर पहुंचना उचित नहीं रहता है। यदि किसी सूक्ष्म समूह का अध्ययन करना हो तो यह सम्भव हो सकता है कि समूह की एक–एक इकाई का व्यक्तिगत रूप से अध्ययन किया जाय। परन्तु समूह यदि वृहद हो तो निर्धारित समयावधि में प्रमाणिक निष्कर्ष निकालना संभव नहीं होगा। वृहद समूहों का अन्वेषण अथवा अध्ययन वैज्ञानिक रूप से किस प्रकार किया जाय कि शोधकर्ता प्रमाणिक रूप से कोई निष्कर्ष प्रस्तुत कर सके। प्रस्तुत इकाई आपकों यह बोध कराने में सहायक

होगी।

1.3 प्रतिदर्श का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Sample)

किसी मिठाई की दुकान पर जा कर क्रेता मिठाई का एक टुकड़ा चख कर यह अनुमान कर लेता है कि मिठाईयां ताजी है या नहीं, इसी प्रकार एक चिकित्सक रुग्ण व्यक्ति के शरीर से थोड़ा सा रक्त निकाल कर इस बात का निष्कर्ष निकाल लेता है कि रोगी को 'मलेरिया' है कि नहीं। दोनों ही मामलों में थोड़ा सा मिठाई का भाग एवं रक्त की थोड़ी सी बूदों से क्रेता एवं चिकित्सक किसी निष्कर्ष पर पहुंचे। यदि क्रेता सारी मिठाई को चख ले अथवा चिकित्सक रोगी के शरीर से सारा रक्त निकाल ले तो स्थित भयावह हो जायगी। विषयवस्तु का सम्पूर्णता से परीक्षण उसे नष्ट कर सकता है और ऐसा करना आवश्यक भी नहीं है। विषयवस्तु की सम्पूर्ण विशषताओं का अध्ययन करने के लिये उसका नमूना लेकर अध्ययन करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है। इसी प्रकार से यदि किसी बैंक के अधिकारी से आग्रह किया जाय कि पिछले दस वर्षों में बैंक की नौकरी से स्वअवकाश लेकर चले गये व्यक्तियों की वर्तमान आर्थिक स्थिति के बारें में रिर्पोट प्रस्तुत करे तो अधिकारी के लिये यह एक कठिन समस्या होगी। कर्मचारियों में से कुछ दूसरे–शहर पर चले गये होगें कुछ देश छोड़कर जा सकते हैं, एवं कुछ भी की मृत्यु भी हो सकती है। एक समूह के रूप में उन तक पहुंचना असम्भव होगा। ऐसी स्थिति में अधिकारी यह करेगा कि उपलब्ध कर्मचारियों के एक प्रतिनिधि समूह की आर्थिक स्थित का अध्ययन कर के रिर्पोट प्रस्तुत करे। उपरोक्त वर्णित परिस्थितियों में मिठाई का टुकड़ा, रक्त की कुछ बूंदे, कर्मचारियों के प्रतिनिधि समूह, यह सभी नमूने हैं, जिनको

साख्यिंकी की शब्दावली में प्रतिदर्श अथवा न्यादर्श (Sample) कहा जाता है।

सामाजिक विज्ञान, अर्थशास्त्र, वाणिज्य एवं प्रबन्धन के क्षेत्र में प्रतिदर्श के अध्ययन का बहुत महत्व होता है इसके बिना कोई अन्वेषण अथवा शोध कार्य सम्पादित नहीं हो सकता है। विज्ञान के क्षेत्र में भी प्रतिदर्शों का चयन एवं अध्ययन किया जाता है। विज्ञान के क्षेत्र में प्रतिदर्श का जो भाग उपलब्ध होता है वही सम्पूर्ण का प्रतिनिधित्व करता है इसीलिये विज्ञान के क्षेत्र में प्रतिदर्श चयन की समस्या नहीं होती है। अन्य क्षेत्रों में प्रतिदर्श चयन में इस कठिनाई का सामना करना पड़ता है कि प्रतिदर्श की इकाईयों का चयन ऐसा हो कि वह सम्पूर्ण का प्रतिनिधित्व कर सके। इस आधार पर हम कह सकते हैं एक अंष के अध्ययन के आधार पर यदि सम्पूर्ण तथ्य के विषय में ज्ञान प्राप्त किया जाता है तो यह प्रतिदर्श प्रक्रिया होती है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 1. प्रतिदर्श के अर्थ एवं परिभाषा को समझाइयें।

1.4 समष्टि तथा प्रतिदर्श (Universe and Sample)

शोधकर्ताओं का उद्देश्य शोध अथवा अन्वेषण की विषयवस्तु अथवा व्यक्त्यिों की विभिन्न विशेषताओं का अध्ययन करना होता है। सांख्यिकीय दृष्टिकोण से शोध की अथवा अन्वेषण की उपलब्ध इकाईयों के कुल योग को समष्टि (Universe) के रूप में जाना जाता है।

इन्हीं में से उन इकाइयों के कुल योग को जिनके विषय में सूचना प्राप्त करनी है जनसंख्या (Population) कहा जाता है। दूसरे शब्दों में यदि कहा जाय तो वह गुण जो कि हमारे अध्ययन का उददेश्य होते है उन्हें अभिलक्षण अथवा विशिष्टता (Characters) कहते हैं और जिन इकाइयों में यह विशिष्टता समाहित रहती है उन्हें प्राथमिक इकाई (Elementary units) कहते हैं। इन्हीं प्राथमिक इकाईयों को समान्यतः जनसख्ंया (Population) कहा जाता है। अतः शोध अथवा अन्वेषण के क्षेत्र में उपलब्ध समस्त इकाईयाँ समष्टि एवं प्राथमिक इकाइयों को (एक अथवा एक से अधिक गुणों के आधार पर) अपने में समाहित किये रहती है। वही जनंसख्या होती है।

बहुधा क्रियात्मकता के दृष्टिकोण से समष्टि तथा जनसंख्या में कोई अर्थगर्भित अथवा अभिव्यन्जित अन्तर नहीं किया जा सकता है। इसलिये इन दो शब्दों समष्टि तथा जनसख्ंया को अन्तर परिर्वतनीय (Interchangable) माना जाता है। शोधकर्ताओं को इनके सूक्ष्म अंतर की जानकारी होनी चाहिए।

जनसंख्या सीमित (Finite) अथवा अनन्त (Infinite) हो सकती है। जब किसी जनसंख्या की सम्पूर्णता के साथ गणना की जा सकती है तब वह सीमित (Finite) कहलाती है, उदाहरण के लिए किसी कारखाने में कार्यरत श्रमिकों की कुल संख्या। एक अनन्त जनसंख्या में वास्तविक रूप में उसकी इकाइयों की गणना करना कठिन ही नहीं वरन् असम्भव होता है, जैसे आकाश में तारे, जिनके बारे में हम कुछ कह ही नहीं सकते है। इस संदर्भ में यह बात स्पष्ट रूप से समझ लेनी चाहिए कि भौतिक रूप में जनसंख्या कभी भी

अनन्त नहीं होती है भले ही वह कितनी भी विशाल क्यों न प्रतीत हो। ऐसी जनसंख्या जिसकी गणना निर्धारित समयावधि में न की जा सकती हो उसे हम व्यवहारिक रूप से अनन्त (Infinite) कह देते हैं।

जब जनसंख्या की समस्त इकाइयों के गुणों का व्यकितगत रूप से अध्ययन किया जाता है तो उसे जनगणना (Census) कहते हैं। किसी राष्ट्र में नागरिकों की जनगणना को छोड़कर (जो कि दस वर्षों में एक बार ही होती है) अन्य क्षेत्रों में प्रायः जनगणना (Census Enumeration) की आवश्यकता नहीं होती है। समाजिक, आर्थिक एवं व्यवहारिक क्षेत्रों के अन्वेषणों में कुछ प्रतिनिधिक इकाइयों अर्थात् प्रतिदर्श के अध्ययन से जनसंख्या के विषय में निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

प्रतिदर्श के आधार पर किया गया अन्वेषण अथवा शोध कार्य व्यवहारिक, मितव्ययी तथा निश्चयात्मक होता है। एक वैज्ञानिक निष्कर्ष में प्रतिदर्श तथा उसकी जनसंख्या सम्बन्धी सूचनाओं को स्पष्ट रूप से प्रकट किया जाता है। शोध के निष्कर्षों का सामान्यीकरण (Generalisation) प्रतिदर्श के आकार तथा प्रविधि पर निर्भर होता है। प्रतिदर्श के चयन में बहुत ही सावधानी रखनी पड़ती है। यदि प्रतिदर्श का चरित्र प्रतिनिधिक नहीं होगा तो कोई भी सांख्यकीय विधि निष्कर्ष को वैज्ञानिक एवं निश्चयात्मक नहीं बना सकती है। उदाहरण के लिए यदि किसी विश्वविद्यालय के अध्यापकों के रहन–सहन के स्तर का अध्ययन करना हो, और यदि अध्यापकों के प्रतिदर्श में अधिकतर ऐसे अध्यापक सम्मिलित कर लिये गये जिनके ऊपर आर्थिक उत्तरदायित्व अधिक है तो ऐसे अध्ययन के निष्कर्ष

भ्रामक हो सकते हैं।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question):

2. जनसंख्या एवं प्रतिदर्श के अन्तर को स्पष्ट करिये। जनगणना पद्धति की विशेषताओं को बताइये।

1.4.1 प्राचल (Parameters) तथा सांख्यकी (Statistic)

गणनात्मक रूप से प्रतिदर्श तथा जनसंख्या को विभिन मापनो के माध्यम से प्रस्तुत किय जाता है जैसे मध्यमान (Average), मध्यिका (Median), बहुलक (Mode) तथा सह सम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Correlation) इत्यादि। जब इनके द्वारा किसी प्रतिदर्श की विशेषताओं को परिभाषित किया जाता है तो इन्हें सांख्यकी (Statisic) कहते हे। जब इनके द्वारा जनसंख्या की विशेषताओं को प्रकट किया जाता है तो इन्हे प्राचल (Parameter) कहा जाता है। सांख्यकी (Statisic) प्रतिदर्श की विशेषता बताती है, जबकि प्राचल (Parameter) जनसंख्या की विशेषता को परिभाषित करता है। उदाहरण के लिये भारत में माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों की औसत लम्बाई 5 फुट है यह मान भारत में माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों की जनसंख्या की विशेषता परिभाषित करता हैं। इसे प्राचल (Parameter) कहा जायेगा। दूसरी तरफ यदि यह बताया जाय कि इलाहाबाद नगर के अमुक माध्यमिक विद्यालय के कला वर्ग के विद्यार्थियों की औसत लम्बाई 5 फुट है तो यह मान एक प्रतिदर्श की विशेषता को प्रकट करेगा, (अमुक विद्यालय के कला वर्ग के विद्यार्थी)। यह एक सांख्यकी (Statisic) है।

सांख्यकीविद छोटे रोमन अक्षरों से प्रतिदर्ष सांख्यकी को तथा बड़े रोमन अक्षरों से जनसंख्या सांख्यकी को निर्दिश्ट करते है। निम्न

तालिका से इसे समझा जा सकता है–

जनसंख्या (Papulation) अध्ययन के लिए इकाइयों का सम्पूर्ण	प्रतिदर्ष (Sample) अध्ययन के लिये जनसंख्या का एक भाग
प्राचल (Parameters)	सांख्यकी (Statisics)
आकार : N	आकार : n
मध्यमान : u	मध्यमान : $\overline{x}$
प्रमाप विचलन : σ	प्रमाप विचल : S.D, s

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question):

3. प्राचल एवं सांख्यकीय (Parameters and Statistics) को परिभाषित करिए।

1.4.2 प्रतिदर्शन का उद्देश्य (Objectives of Sampling)

अब तक के अध्ययन से हम समष्टि/जनसंख्या एवं इनमें से प्रतिदर्श के चयन की प्रक्रिया का ज्ञान प्राप्त कर चुके हैं। अब हमें यह भी जान लेना चाहिए कि प्रतिदर्शन का वास्तविक उद्देश्य क्या है। हमें यह स्पष्ट है कि प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर शोधकर्ता अन्वेषण के तथ्य के विशय में पूरी जानकारी प्राप्त कर लेता है। इसके द्वारा शोधकर्ता की शक्ति, एवं संसाधन दोनों की बचत होती हैं प्रतिदर्शन के उद्देश्यों को संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

(i) प्राचलों का अनुमान (Estimation of Parameters)

प्रतिदर्श के अध्ययन से जनसंख्या के तथ्य के विषय में समुचित जानकारी मिल जाती है, जिसके आधार पर उचित अनुमान किया जा सकता है।

यह अनुमान दो प्रकार से लगाये जा सकते हैं–

(अ) बिन्दु अनुमान (Point Estimation)–इसके अन्तर्गत प्रतिनिधि प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर प्राचल (Parameters) के विषय में श्रेष्ठ परिणाम प्राप्त किये जाते है, उदाहरण के लिये हाई स्कूल स्तर के विद्यार्थियों की फास्ट फूड खानें की आदत के प्रतिनिधि प्रतिदर्श अध्ययन के आधार पर भारत में हाई स्कूल स्तर के विद्यार्थियों की फास्ट फूड खाने की आदत के विषय में मत बनाया जा सकता है।

(ब) अन्तराल अनुमान (Interval Estimate)– इसके अन्तर्गत लगाया गया अनुमान एकमात्र न होकर सीमाओं के बीच पाया जाता है। उदाहरण के लिये यह अनुमान लगाया जाय कि विश्वविद्यालय स्तर के विद्यार्थियों की प्रतिदिन व्यय करने की आदत का औसत 200 ± 10 है। यहां पर प्राचल का माप दो सीमाओं 190 और 210 के मध्य पाया जायेगा।

(ii) परिकल्पना परीक्षण (Hypothesis Testing)

इसके अन्तर्गत प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि/जनसंख्या के विषय में की गई कल्पना की जांच कर के वास्तविक सांख्यिकी (Statistic) एवं प्राचल (Parametre) के मध्य के अन्तर को देखा जाता है। यदि अन्तर है तो उसके कारणों का विश्लेषण किया

जाता है। एक आदर्श स्थिति में दोनों में कोई अन्तर नहीं होना चाहिए परन्तु ऐसा एक दुर्लभ अथवा विरल परिस्थित में ही हो सकता है।

1.4.3 प्रतिदर्शन की आवश्कता (Need of Sampling)

हम प्रतिदर्ष के उद्देश्यों एवं उपयोग से परिचित हो चुके हैं एवं यह भली भांति जान चुके है कि प्रतिदर्शों के प्रयोग से शोधकार्यों में बहुत ही सुविधा एवं सरलता प्राप्त हो जाती है। सामाजिक, आर्थिक एवं व्यवहारिक क्षेत्र के शोधों में प्रतिदर्शों के प्रयोग के बिना शोध की कल्पना ही नहीं की जा सकती है। प्रतिदर्शों के प्रयोग की आवश्यकता को संक्षिप्त रूप से इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं–

(i) समय की बचत (Economy of Time)

प्रतिदर्शन के माध्यम से हम विशाल जनसंख्या के छोटे से भाग का अध्ययन करते हैं, जिससे मूल्यवान समय की बचत होती है। एकत्रित समंकों का विश्लेषण भी सरलता से हो जाता है तथा निष्कर्ष भी समय पर प्राप्त किये जा सकते हैं। उदाहरण के लिये किसी कम्पनी के प्रबन्धतंत्र को, क्रियान्वित की जाने वाली नयी नीति के विषय में श्रमिकों की प्रतिक्रिया ज्ञात करनी है, तो ऐसी स्थिति में एक–एक श्रमिक से प्रतिक्रिया जानने (जनगणना) के स्थान पर कुछ श्रमिकों की प्रतिक्रिया (प्रतिदर्श) के आधार पर प्रबन्धतंत्र किसी निष्कर्ष पर पहुंच सकता है।

(ii) जनसंख्या की विशालता (Largesize of Population)

कभी–कभी जनसंख्या इतनी विशाल होती है कि जनगणना करना वास्तविक रूप से सम्भव ही नहीं होता, ऐसी स्थिति में सर्वेक्षण में केवल प्रतिदर्श का प्रयोग ही किया जाता है। कभी–कभी जनसंख्या तक पहुंच ही बहुत दुरूह हो जाती है, ऐसी स्थित में प्रतिदर्श पद्धति ही एकमात्र विकल्प रहती है।

(iii) लागत (Cost)

प्रतिदर्श सर्वेक्षण में जनगणना सर्वेक्षण की तुलना में लागत बहुत कम आती है। सीमित संसाधनों की दषा में प्रतिदर्श पद्धति ही अपनायी जाती है।

(iv) समंको की शुद्धता (Precision of Data)

प्रतिदर्श पद्धति में आंकड़ें कम होने के कारण उनका विश्लेषण सरल हो जाता है जिसके आधार पर विश्वसनीय निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यद्यपि जनगणना ही विश्वसनीय निष्कर्ष निकाले जाने की एक मात्र पद्धति है, परन्तु इसमें विशाल संख्या एवं प्रशिक्षित व्यक्तियों के आभाव के कारण समकों का संकलन एवं विश्लेषण अशुद्ध हो जाने की सम्भावना बनी रहती है। अतः समकों की षुद्धता एवं निष्कर्षों की विश्वसनीयता बनाये रखने के लिये प्रतिदर्शों के आधार पर ही बहुधा अध्ययन किये जाते हैं।

(v) विषयवस्तु को नष्ट करके निष्कर्ष प्राप्त करना

कुछ ऐसे अध्ययन होते है जहाँ पर बिना विषय वस्तु को नष्ट किये निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है। ऐसा गुणवत्ता

नियंत्रण (Quality Control) के मामलों में देखा जाता है। उदाहरण के लिये बिजली के बल्ब की क्षमता का परीक्षण करना हो तो उसमें विद्युत प्रवाह का बोल्टेज तब तक बढ़ातें जायेगें तब तक कि बल्ब फ्यूज हो जाय या फूट न जाय। ऐसा करके उत्पादित होने वाले सभी बल्बों के विषय में निष्कर्ष निकाला जा सकता है। ऐसे मामलों में प्रतिदर्श पद्धति उपयुक्त रहती है। यदि ऐसा सभी बल्बों के साथ किया जाये तो कोई भी बल्ब उपयोग के लिये नहीं बचेगा।

1.4.4 प्रतिदर्शन की सीमाएं (Limitatioins of Sampling)

प्रतिदर्शन पद्धति की सीमाएं अथवा दोष यद्यपि थोड़े ही है पर एक शोधकर्ता को उनका ध्यान सदैव रखना चाहिए। ऐसा करने से शोधकर्ता भविष्य में होने वाली असफलताओं से बच सकता है। कुछ ऐसी ही सीमाओ ंका उल्लेख नीचे किया जा रहा है।

(i) पक्षपात की सम्भावना (Possibility of Bias)

प्रतिदर्श चयन में चयनकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात का कुछ न कुछ प्रभाव रहता है। शोधकर्ता को इस बिन्दु पर अवश्य ध्यान रखनाा चाहिये कि प्रतिदर्ष, जहां तक हो सके, चयनकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात, अज्ञानता एवं पूर्वाग्रहों से मुक्त हो।

(ii) प्रतिनिधि प्रतिदर्श चयन की समस्या (Problem of Selection of Representative Sample)

यह कह देना कि प्रतिदर्श जनसंख्या का पूर्ण प्रतिनिधित्व

करता है उचित नही प्रतीत होता क्योंकि वास्तविकता में ऐसा बहुत कम ही सम्भव होता है।

(iii) योग्य एवं अनुभवी व्यक्तियों का अभाव (Scarcity of Qualified and Experienced Persons)

प्रतिदर्श का चयन प्रत्येक व्यक्ति नहीं कर सकता है, इस कार्य के लिए योग्यता प्राप्त अनुभवी व्यक्ति की आवश्यकता होती है। अनुभवहीन व्यक्ति के द्वारा चयनित किये गये प्रतिदर्श के परिणाम को जनसंख्या का प्रतिनिधि मानकर लागू करने से अशुद्ध निष्कर्ष प्राप्त होंगे।

(iv) प्रतिदर्श इकाइयों की अस्थिरता (Unstability of Sample Units)

प्रतिदर्श की इकाइयों में अस्थिरता होती है। सभी व्यक्तियों से एक ही साथ (Simultaneous) सम्पर्क नहीं किया जा सकता है। इकाइयों के अस्थिर होने से प्रतिनिधित्व ठीक प्रकार से नहीं होता है। इसके कारण परिणाम अविश्वसनीय हो जाते हैं।

1.5 प्रतिदर्शन के नियम (सिद्धान्त) (Principles of Sampling)

1.5.1 सांख्यकीय सततता का नियम (Law of Statistical Regularity)

सम्भाव्यता के नियम के अनुसर यदि किसी जनसंख्या से यादृच्छिक (Random) विधि से अधिक मात्रा में प्रतिदर्श का चयन किया जाता है तो इस बात की संभावना बलवती होती है कि चयनित प्रतिदर्श में जनसंख्या के गुण विद्यमान हों। ऐसे प्रतिदर्श से प्राप्त

परिणामों से सामान्यीकरण किया जा सकता है। जैसे–जैसे प्रतिदर्श का आकार (Size of Sample) बड़ा होता जाता है उसी प्रकार से यह जनसंख्या का अधिकाधिक प्रतिनिधित्व करने लगता है एवं उसके गुणों को परिलक्षित करता है। परन्तु प्रतिदर्शों के बड़ें आकार की अपनी समस्या होती है जैसे कि अधिक खर्चीला होना एवं गणना में जटिल होना। अतः प्रतिदर्शों के आकार, आर्थिक क्षमता एवं शुद्धता की सीमा आदि कारकों में संतुलन बना कर चलना चाहिए। एक बात का और ध्यान रखना चाहिए कि यादृच्छिक रूप से चयनित प्रतिदर्शों की इकाइयां जनसंख्या के निहित गुणों का सत्य प्रतिनिधित्व करती हों।

1.5.2 महांक जड़ता का नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

यह हम जानते हैं कि प्रतिदर्श के आकार एवं परिणामों की शुद्धता में पारस्परिक सम्बन्ध होता है। बड़े आकार का प्रतिदर्श सदैव जनसंख्या का उचित प्रतिनिधित्व करता है। बड़ी मात्रा अथवा संख्या में प्रतिपूर्ति के गुण होते हैं। बड़ी संख्याएं अधिक स्थिर होती हैं। परन्तु ऐसा भी नहीं है कि बड़ी–संख्याओं में विचरण नहीं होता है। बड़ी संख्याओं का विचरण छोटी संख्याओं की अपेक्षा बहुत कम होता है। यह बात सिक्के को उछालने के उदहारण से स्पष्ट हो जाती है। एक सिक्के को दस बार उछालनें में यदि सात बार 'हेड' और तीन बार 'टेल' आता है, तो, सौ बार उछालने में हो सकता है कि साठ बार 'हेड' आये और चालीस बार 'टेल' आये। यदि सिक्के को एक हजार बार उछाला जाय तो हो सकता है 'हेड' और 'टेल' चार सौ नब्बे और पांच सौ दस बार आ जाय। यह सिद्धान्त

नियमितता के सिद्धान्त का ही विस्तार है कि जितने बड़े आकार का प्रतिदर्श हो परिणाम उतना ही विश्वसनीय होगा।

1.5.3 सांख्यकीय दृढ़ता का नियम (Law of Statistical Presistence)

सांख्यकीय दृढ़ता का नियम समग्र/जनसंख्या के उन मूल गुणों को इंगित करता है जिनका स्वरूप सदैव बना रहता है, चाहे जनसंख्या को बढ़ा दिया जाय चाहे प्रतिदर्श के आकार को बढ़ा दिया जाय। यह मूलभूत गुण सदैव विद्यमान रहेगें। उदाहरण के लिये यह देख गया है कि चार्टड एकाउन्टेन्सी की परीक्षा में प्रथम प्रयास में केवल पांच प्रतिशत प्रतिभागी ही पास होते हैं, ऐसी स्थित में यदि प्रतिभागियों की संख्या दस गुना भी बढ़ा दी जाय तो प्रथम प्रयास में पास होने वालों का प्रतिशत लगभग उसी के आस पास ही रहेगा।

1.5.4 सांख्यकीय अनुकूलता का नियम (Law of Statistical Optimism)

यह सिद्धान्त श्रेष्ठ परिणाम एवं लागत में अनुकूलता प्राप्त करने पर बल देता है। हम जानते हैं कि जैसे–जैसे जनसंख्या का आकार बड़ा होता जायेगा प्रतिदर्शो का आकार भी वैसे ही बढ़ेगा और उसी प्रकार से विश्वसनीय परिणाम भी प्राप्त होंगे, परन्तु साथ ही एक अन्य महत्वपूर्ण तत्व, सर्वेक्षण की लागत, भी बढ़ती जायेगी। अतः जनसंख्या अथवा प्रतिदर्शों के आकार को लागत एवं विश्वसनीयता के परिप्रेक्ष्य में ही निर्धारित करना चाहियें। यह सिद्धान्त वांछित विश्वसनीय परिणामों को न्यूनतम लागत पर प्राप्त करने पर बल देता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question):

4. महांक जड़ता नियम से आप क्या समझते है?

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 5. सांख्यकीय सतत्ता का नियम क्या है? विस्तार से लिखिये।

1.6 प्रतिदर्श का प्रारूप (Sample Design)

प्रतिदर्श के चयन हेतु अनेकों विधियों एवं प्रारूपों का विकास किया गया है परन्तु उन्हें सामान्य रूप से दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता हैं

1.6.1 सम्भाव्य प्रतिदर्षन (Probability Sampling)

किसी भी सर्वेक्षण का उद्देश्य होता है जनसंख्या की विशेषता का अध्ययन करना। इस उद्देश्य की प्राप्ति हेतु शोधकर्ता ऐसे समंको का संग्रहण करता है जो जनसंख्या की विशेषता को अपने में समाहित किये रहते हैं। प्रतिदर्श के चयन में जब ऐसी विधि का प्रयोग किया जाता है जिससे जनसंख्या के प्रतिनिधित्व की सम्भावना होती है तब उसे सम्भाव्य प्रतिदर्श कहते है। ऐसे प्रतिदर्शों में जनसंख्या की प्रत्येक इकाई के चयन की सम्भावना समान होती है। दूसरे शब्दों में कहा जाय तो जनसंख्या की किसी भी इकाई के चयन होने की सम्भावना षून्य नहीं होती है। सम्भाव्य प्रतिदर्श में प्रतिदर्शन त्रुटि सम्भाव्य अथवा संयोग से ही होती है। इस आधार पर हम यह कह सकते हैं कि सम्भाव्य प्रतिदर्श की निम्न विशेषताएं होती हैः–

(i) सम्भाव्य प्रतिदर्श में जनसंख्या के प्रत्येक (घटक) इकाई के

चयन किये जाने की सम्भावना समान होती है।

(ii) सम्भाव्य प्रतिदर्श जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता है।

(iii) सम्भाव्य प्रतिदर्श द्वारा एकत्रित समंकों का वितरण सामान्य (Normal) होता है।

(iv) सम्भाव्य प्रतिदर्शो पर सांख्यकीय परीक्षणों का प्रयोग सरलता से किया जा सकता है।

(v) सम्भाव्य प्रतिदर्शो द्वारा समान्यीकरण की प्रक्रिया सरल हो जाती है।

सम्भाव्य प्रतिदर्शन के प्रकार (Typs of Probability Sampling)

(क) साधारण यदृच्छिक प्रतिदर्शन (Simple Random Sampling)

यादृच्छिक शब्द का अर्थ होता है बेतरतीब अथवा अनियत अथवा जिसमें कोई विशेष प्रयोजन न हों। इसी के सदृश, यादृच्छिक प्रतिदर्शन में जनसंख्या की प्रत्येक इकाई को प्रतिदर्श के रूप में चुनें जाने की सम्भावना सदैव समान रूप से रहती है। इसके अतिरिक्त इसकी एक विशेषता यह है कि प्रतिदर्श में सम्मिलित किये जाने वाली एक इकाई कभी भी दूसरी इकाई के प्रतिदर्श में सम्मिलन की सम्भावना को प्रभावित नहीं करती है। प्रतिदर्शन की यह व्यापक रूप से अपनायी जाने वाली सर्वप्रिय प्रणाली है। यादृच्छिक प्रतिदर्शन को सजातीय, अथवा सादष अथवा समरुपी (Homogeneous) जनसंख्या पर प्रयोग करना चाहिए अर्थात् जनसंख्या की इकाइयों में वही लक्षण या गुण होने चाहिए जिनके विषय में

शोधकर्ता अन्वेषण करना चाहता हैं। आयु, आय, लिंग एवं क्षेत्रीयता, आदि सजातीय होने के उदाहरण है।

यादृच्छिक विधि से प्रतिदर्श के चयन की कई विधियां हैं जो निम्न वर्णित हैं–

(a) सिक्का उछालकर (Tossing of a Coin)

इस विधि में, सिक्के के किस पहलू का चयन करता है इस बात को ध्यान में रखकर जनसंख्या की प्रत्येक इकाई के नाम से, सिक्का उछालकर इच्छित पहलू आने पर उसका चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार से प्रतिदर्ष प्राप्त किया जा सकता है।

(b) पासा फेंककर (Throwing of a Dice)

इस विधि में पासा फेंकने पर जो अंक आता है उसी संख्या की इकाई का चयन कर लिया जाता है।

(c) लाटरी विधि (Lottery Method)

इस विधि में जनसंख्या की प्रत्येक इकाई (घटक) के नाम से पर्ची बनाकर उनको आपस में मिलाकर एक डब्बे में बन्द कर दिया जाता है, तत्पश्चात् निर्धारित संख्या में पर्ची निकालकर, नाम लिखी हुई इकाई को प्रतिदर्श में सम्मिलित कर लिया जाता है।

(d) सारणी के द्वारा (Through Table)

उपरोक्त वर्णित, पासा फेंकना लाटरी निकालना एवं सिक्का उछालना आदि विधियां अपनानें में समय, श्रम एव ंधन का व्यय अधिक हो जाता है, तथापि जनसंख्या के आकार के

विशाल होने पर यह विधियां अव्यवहारिक एवं दुष्कर हो जाती हैं। यादृच्छिक प्रतिदर्श के चयन की सबसे सुगम एवं सरल विधि होती है यादृच्छिक संख्याओं की तालिका का प्रयोग करना। (एल0एच0सी0 टिपिट ने इस विधि के लिये यादृच्छिक संख्याओं की एक तालिका बनाई है, जिसका प्रयोग व्यापक रूप से किया जाता है) यादृच्छिक संख्याओं की सारणी के माध्यम से यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन बहुत ही आसान हो जाता है।

इस विधि में जनसंख्या की प्रत्येक इकाई को एक विशिष्ट संख्या निर्धारित कर दी जाती है। तत्पश्चात् जितनी संख्या में प्रतिदर्श चयनित करना है उतनी संख्या में तालिका में वर्णित संख्याएं चुन ली जाती हैं, उन संख्याओं का मूल्य जो भी आता है उसी मूल्य की संख्या का प्रतिदर्श चुन लिया जाता है।

इस प्रक्रिया को निम्न चरणों में परिभाषित कर सकते हैं।

(i) जनसंख्या (N) तथा प्रतिदर्श (n) को निर्धारित करना।

(ii) जनसंख्या की इकाइयों को क्रमबद्ध करना

(iii) यादृच्छिक सारणी के बेड़े अथवा सीधे स्तम्भ के किसी खाने से चयन प्रारम्भ करना।

(iv) खानों में लिखी हुई संख्या के उतने अंक ले लेना जितने कि जनसंख्या के अन्दर आते हों। जैसे जनसंख्या 100 हो तो अन्तिम के दो अंक जो 0–99 के मध्य आते हों उन्हें चुन लेना। किसी भी अंक को दोहराना नहीं चाहिए।

(v) ऐसा जब तक करना चाहिए जब तक वांछित प्रतिदर्श (n) न प्राप्त हो जाय।

सारणी –1

यादृच्छिक संख्याओं की सारणी

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	96568	11860	83699	38631	90045	69696	48572	05917	51905	10052
2.	03550	59144	59468	37984	77892	89766	86489	46619	50236	91136
3.	22188	81205	99699	84260	19693	36701	43233	62719	53117	71153
4.	63759	61429	14043	44095	84746	22018	19014	76781	61086	90216
5.	55006	17765	15013	77707	54317	48862	53823	52905	70754	68212
6.	81972	45644	12600	01951	72166	52682	37598	11955	73018	23528
7.	06377	50136	33122	31794	86723	58037	36065	32190	31367	96007
8.	92363	99784	94169	03652	80824	33407	40837	97749	18361	72666
9.	96083	16943	89916	55159	62184	86206	09764	20244	88388	98675
10.	92993	10747	08985	44999	35785	65036	05933	77378	92339	96151
11.	95083	70292	50394	61947	65591	09774	16216	63561	59751	78771
12.	77308	60721	96057	86031	83148	34970	30892	53489	44999	18021
13.	11913	49624	28519	27311	61586	28576	43092	69971	44220	80410
14.	70648	47484	05095	92335	55299	27161	64486	71307	85883	69610
15.	92771	99203	37786	81142	44271	36433	31726	74879	89384	76886
16.	78816	20975	13043	55921	82774	62745	48338	88348	61211	88074
17.	79934	34392	56097	87613	94627	63622	08110	16611	88599	02890
18.	64698	83376	87527	36897	17215	74339	69856	43622	22567	11518
19.	44212	12995	03581	37618	94851	63020	65348	55857	91742	79508
20.	89292	00204	00579	70630	37136	50922	83387	15014	51838	81760
21.	08692	87237	87879	01629	72184	33853	95144	67943	19345	03469
22.	67927	76855	50702	78555	97442	78809	40575	79714	06201	34576
23.	62167	94213	52971	85794	68067	78814	40103	70759	92129	46715
24.	45828	45441	74220	84157	23241	49332	23646	09390	13031	51569
25.	01164	35307	26526	80335	58090	85871	07205	31749	40571	51755
26.	29283	31581	04359	45538	41435	61103	32428	94042	39971	63678
27.	19868	79978	81699	84904	50163	22652	07845	71308	00859	87984
28.	14292	93587	55960	23159	07370	65065	06580	46285	07884	83928
29.	77410	52135	29495	23032	83242	89938	40516	27252	55565	64714
30.	65580	06921	35675	81645	60479	71035	99380	59759	42161	93440
31.	07780	18093	31258	78156	07871	20369	53977	08534	39433	57216
32.	0548	08454	36674	46255	80541	42903	37366	21164	97516	66181
33.	22023	60448	69344	44260	90570	01632	21002	24413	04671	05665
34.	20827	37210	57797	34660	32510	71558	78228	42304	77197	79168
35.	47802	79270	48805	59480	88092	11441	96016	79061	51823	94442
36.	79730	86591	18978	25479	77684	88439	34112	26052	57112	91653
37.	26439	02903	20935	76297	15290	84688	74002	09467	41111	19194
38.	32927	83426	07848	59372	44422	53372	27823	25417	27150	21750
39.	51484	05286	77103	47284	00578	88774	15293	50740	07932	87633
40.	45142	96804	92834	26886	70002	96643	36008	02239	93563	66429

उदाहरणः—मान लीजिए कि आपको 90 छात्रों की जनसंख्या से 20 छात्रों का प्रतिदर्श चयनित करना है। सबसे पहले छात्रों की संख्या 00से 89 तक क्रमवार कर लें। अब यादृच्छिक सारणी से 00 से 89 तक के दो अंकों (digits) की 20 संख्याएं प्राप्त कर लें। सारणी के किसी भी स्थान से आप यह क्रिया प्रारम्भ कर सकते हैं। यदि आप 7वीं पंक्ति के प्रथम स्तम्भ से प्रारम्भ करते हैं तो उन संख्याओं को देखते हुए, जिनके अन्तिम दो अंक 00 से 89 के मध्य आते हैं, से आगे बढ़तें हुए 8वें, 9वें एवं आगे की पंक्तियों पर तब तक आते जायं तब तक बिना दोहराते हुए आपकों 20 संख्याएं न प्राप्त हो जाये। ऐसा करते हुए आपकों सारणी से निम्न संख्याएं प्राप्त होगी।

(7वीं पंक्ति से प्रारम्भ करते हुए)

7वीं पंक्ति में	06377	50136	33122	31794	86723	58037	36065	32190	31367	96007
8वीं पंक्ति में	92363	99784	94169	03652	80824	33407	40837	97749	18361	72666
9वीं पंक्ति में	96083	16943	89916	55159	62184	86206	09764	20244	88388	98675

7वीं 8वीं एवं 9वीं पंक्तियों में लिखी हुई संख्याओं के अन्तिम दो अंकों को देखें। उनमें से जो 00—89 के मध्य आता हो उसे चुन ले आप देखेगें कि संख्या 31794, एवं 32190 (7वीं पंक्ति), में 89 से अधिक है, इसे छोड़ दे। इसी प्रकार संख्या 58037 (7वीं पंक्ति), 40837 (8वीं पंक्ति), में अन्तिम दो अंक 37 दो बार आए हैं अतः दूसरी बार की संख्या 40837 को छोड़ दें। अब आपकों जो बीस संख्याएं मिलेगी वह आपके द्वारा चयनित प्रतिदर्ष होगी। जो निम्न हैः—

77	36	22	23	37	65	67	07	63	84
69	52	24	49	61	66	83	43	16	59

ऐसी विभिन्न सारिणियां उपलब्ध रहती हैं जिनकों शोधकर्ता

अपनी सुविधानुसार प्रयोग करते हैं जिनमें से कुछ का उल्लेख निम्न पंक्तियों में किया जा रहा है–

(i) टिपेट (सारणी) तालिका–एल0एच0सी0 टिपेट (L.H.C.Tippet) द्वारा निर्मित तालिका शोधकर्ताओं के द्वारा सर्वाधिक प्रयोग की जाने वाली सारणी है। इस सारणी में 10400, चार अंको वाली संख्याएं है।

(ii) फिशर एवं येट्स सारणीः–फिशर एवं येट्स (Fisher & Yates) ने वर्ष 1938 में 15000 संख्याओं वाली सारणी की संरचना की थी।

(iii) केन्डाल एवं स्मिथ सारणीः–केन्डाल एवं बाबिंगटन स्मिथ (Kendal & Babington Smith) द्वारा वर्श 1939 में 25000 संख्याओं वाली सारणी का विकास किया था।

(iv) राव, मित्र एवं मथाई सारणी–राव मित्र एवं मथाई (Rao Mitra & Mathai) द्वारा 1966 में 5000 चार अंकों वाली सारणी की रचना की गई थी।

साधारण यादृच्छिक प्रतिदर्शन के लाभ

(i) इस विधि में शोधकर्ता को जनसंख्या के गुणों की सम्पूर्ण जानकारी होने की आवश्यकता नहीं पड़ती है।

(ii) इस विधि में व्यक्तिगत पक्षपात की सम्भावना न्यून रहती है।

(iii) यादृच्छिक प्रतिदर्श की त्रुटियों को सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है।

(iv) इस विधि का प्रयोग सभी प्रकार से अनुसन्धानों पर किया जा सकता है।

साधारण यादृच्छिक प्रतिदर्शन की सीमाएं

(i) जब जनसंख्या विशाल होती है तो समय बहुत अधिक लगता है।

(ii) विश्वसनीय परिणाम प्राप्त करने के लिये प्रतिदर्श के आकार को सदैव बड़ा ही करना पड़ता है।

(iii) इस विधि में प्रायः संयोग पर निर्भर करना पड़ता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 6. ध ाारण यादृच्छिक प्रतिदर्शन से आप क्या समझते हैं? यादृच्छिक प्रतिदर्शन की विधियों का वर्णन करिये।

(ख) क्रमिक प्रतिदर्शन (Systematic Sampling)

यह विधि यादृच्छिक प्रतिदर्श की तुलना में एक सुधरी हुई प्रविधि हैं। इसमें जनसंख्या की जानकारी आवश्यक होती है। इस विधि में जनसंख्या की सभी इकाइयों को वर्णमाला अथवा अन्य सुविध ााजनक विधि से क्रमवद्ध कर लेते हैं। इस प्रक्रिया में एक प्रतिदर्श यादृच्छिक रूप से चुन लेते है तत्पश्चात् अन्य प्रतिदर्श पूर्व निर्धारित क्रम में चुन लिये जाते है जैसे हर पांचवी इकाई को प्रतिदर्श में सम्मिलित करना। इस विधि में निम्न प्रकार से प्रतिदर्श चयनित किये जाते हैं।

(i) सर्वप्रथम जनसंख्या की इकाइयों को 1 से तक N क्रम से सूचीबद्ध कर लिया जाता है।

(ii) दूसरे चरण में अन्तराल 'K', को जनसंख्या में प्रतिदर्श के आकार n से भाग देकर ज्ञात कर लेते हैं– $k = {}^{N}/_{n}$

(iii) इसके बाद पहला प्रतिदर्श यादृच्छिक रूप से चयनित करते हैं।

(iv) तत्तश्चात परवर्ती प्रतिदर्श उसी अन्तराल से नियमित अथवा क्रमिक रूप से चयनित कर लेते हैं।

उदाहरणः—

मान लीजिए कि 1000 जनसंख्या में से 100 प्रतिदर्श चयनित करना है। ऐसी स्थिति मेंः—

(i) जनसंख्या को 0 से 999 तक क्रम से व्यवस्थित किया जायेगा।

(ii) अन्तराल $K = \frac{1000}{100} = 10$ ज्ञात किया जायेगा।

(iii) प्रथम प्रतिदर्श को 0 से 9 तक के मध्य यादृच्छिक रूप से चयनित किया जायेगा। यह मान लीजिए कि पहला चयनित प्रतिदर्श 5वां है।

(iv) परवर्ती प्रतिदर्श इकाइंया होगी— 15, 25, 35 995

क्रमिक प्रतिदर्श के लाभ

(i) इस विधि का सबसे बड़ा लाभ है शीध्रता। यादृच्छिक प्रतिदर्शन की तुलना में इसमें बहुत ही कम समय लगता है।

(ii) इस विधि से प्राप्त परिणामों से निष्कर्ष निकाला जा सकता है एवं सामान्यीकरण किया जाता है।

क्रमिक प्रतिदर्श की सीमांए

(i) प्रतिदर्श का प्रतिनिधित्व भ्रामक हो सकता है। जैसे किसी बाजार में कपड़े की हर दसवी दुकान का चयनन करना और

यदि हर दसवी दुकान एक ''ब्रान्डेड षो रूम'' हो तो चयनित प्रतिदर्श कभी भी प्रतिनिधि प्रतिदर्श नहीं हो सकेगा।

(ii) प्रथम प्रतिदर्श, जो कि यादृच्छिक रूप से चुना जाता है, यदि प्रतिनिधिक चरित्र का न हो तो सभी परवर्ती प्रतिदर्शों में दोष विद्यमान रहेगा।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 7. क्रमिक प्रतिदर्शन की विधि का वर्णन कीजिए।

(ग) स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्शन (Stratified Random Sampling)

स्तरीय यादृच्छिक प्रतिदर्शन विधि उपरोक्त वर्णित दोनों विधि ायों से श्रेष्ठ हैं जहां पर जनसंख्या विशम अथवा विजातीय हो तो इस विधि का प्रयोग किया जाता है। ऐसी जनसंख्या में अ—समान तत्व जैसे, पुरूष—स्त्री, शहरी—ग्रामीण, शिक्षित—अशिक्षित होते हैं। ऐसी परिस्थित में मानदण्डों के आधार पर जनसंख्या को वर्गीकृत कर देते है, जिन्हे स्तर (Strata) कहते हैं। इसके पश्चात इन स्तरों अथवा वर्गों से प्रतिदर्श का चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार से चयनित प्रतिदर्शों में सभी वर्गों का प्रतिनिधित्व हो जाता है।

इसके अगले चरण में स्तरित प्रतिदर्षों के आकार का निध ारण किया जाता है। यह तीन प्रकार से होता है

(i) अनुपातिक स्तरित प्रतिदर्श (Proportionate Stratified Sample) इसके अन्तर्गत एक निश्चित अनुपात में प्रत्येक वर्ग से प्रतिदर्शों को चुना जाता है।

(ii) गैर अनुपातिक स्तरित प्रतिदर्श (Disproportionate Stratified Sample) गैर अनुपातिक स्तरित प्रतिदर्श विधि के अन्तर्गत सभी स्तरों से समान संख्या में इकाइयों का चयन कर लिया जाता है, चाहे स्तरों का आकार कुछ भी हो। इस विधि में, इकाइयों का चयन शोधकर्ता के विश्लेशणात्मक निर्णय पर निर्भर करता है।

(iii) उचित प्रतिदर्श विधि (Optimum Sampling Method) इस विधि के अन्तर्गत विभिन्न स्तरों से प्रतिदर्शों का चयन न्यूनतम–लागत पर श्रेष्ठतम परिणाम प्राप्त करने के सिद्धांत के आधार पर किया जाता है।

उदाहरणः–प्रश्न आपको कर्मचारियों की संख्या एवं उनके पारिश्रमिक को नीचे तालिका में दिखाया जा रहा हैः–

पारिश्रमिक प्रति माह	कर्मचारियों की संख्या			
	अकुशल	**अर्धकुशल**	**कुशल**	**योग**
800 से कम	300	90	10	400
800–1200	200	80	10	290
1200–1600	100	180	30	310
योग	**600**	**350**	**50**	**1000**

यदि 10 प्रतिदर्शों का चयन करना हो तो

(i) अनुपातिक स्तरित प्रणाली का प्रयोग करते हुए अकुशल, अर्धकुशल एवं कुशल श्रमिकों की संख्या को प्रदर्शित करिये।

(ii) यदि अकुशल, अर्धकुशल एवं कुशल श्रमिकों को 5:4:1 के अनुपात में चुनना हो तो उनका वितरण क्या होगा। इसके अतिरिक्त उनके पारिश्रमिक स्तर को ध्यान में रखते हुए उनके वितरण को 3:2:1 के अनुपात में प्रदर्शित करिये।

हलः प्रतिदर्श का आकार 100 होगा जो कुल योग का 10 प्रतिशत है पहली परिस्थित में अनुपातिक स्तरित प्रणाली को प्रयोग करते हुए प्रत्येक इकाई का 10 प्रतिशत चयनित करना होगा जो कि निम्न प्रकार से होगा–

पारिश्रमिक प्रति माह	अकुशल	अर्धकुशल	कुशल	योग
800 से कम	30	09	01	40
800–1200	20	08	01	29
1200–1600	10	18	03	31
योग	**60**	**35**	**05**	**100**

दूसरी परिस्थित में भी प्रतिदर्श का आकार 100 है, परन्तु यहां पर अकुशल, अर्धकुशल एवं कुशल श्रमिकों को 5:4:1 के अनुपात में वितरित करना है, तथा उनके वितरण को आय के आधार पर ध्यान में रखते हुए 3:2:1 के अनुपात में प्रदर्शित करना है। जो कि निम्न होगा–

पारिश्रमिक प्रति माह	अकुशल	अर्धकुशल	कुशल	योग	अनुपात
800 से कम	25	20	05	50	3
800–1200	17	13	03	33	2
1200–1600	08	07	02	17	1
योग	**50**	**40**	**10**	**100**	
अनुपात	5	4	1		

स्पष्टीकरणः इस परिस्थित में 100 को 5:4:1 के अनुपात में वितरित कर 50,40 और 10 की सख्या प्राप्त की गई। फिर 50,40, और 10 को आयुस्तर के आधार पर 3:2:1 के अनुपात में वितरित किया गया है।

स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श विधि के लाभ

(i) यह प्रतिदर्श जनसख्ंया का अच्छा प्रतिनिधित्व करता है ।

(ii) यह विधि जनसंख्या की विषमता को, विभिन्न स्तरों के माध्यम से, दूर करती है।

(iii) यह विधि वस्तुनिष्ठ होती है।

(iv) इससे प्राप्त परिणाम विश्वस्नीय एवं बहुत सीमा तक शुद्ध होते हैं।

(v) शोधकर्ता की दृष्टि से यह विधि सुविधाजनक होती है।

(vi) विभिन्न स्तरों के माध्यम से भौगोलिक रूप से बिखरी हुई इकाइयाँ एकीकृत हो जाती है।

(vii) इसमें व्यक्तिगत पक्षपात की सम्भावना न्यून होती है।

स्तरित प्रतिदर्श विधि की सीमांए

(i) इस विधि में यदि इकाइयों को उचित रूप से भारित या गुणबद्ध नहीं किया गया तो परिणाम भ्रामक हो सकते हैं।

(ii) समान गुणों वाली जनसंख्या को स्तरों में विभाजित करना कठिन हो जाता है।

(iii) यह विधि खर्चीर्ली एवं अधिक समय लेती है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 8. स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्शन से आप क्या समझते हैं? यह समूह प्रतिदर्शन से किस प्रकार भिन्न है ?

(घ) बहुरूपी प्रतिदर्शन (Multiple Sampling)

इस विधि में दो या दो से अधिक समूह प्रतिदर्शों का चयन करते हैं इसलिये इसे बहुरूपी प्रतिदर्शन विधि कहते हैं। इस विधि का प्रयोग वहां पर अधिकतर किया जाता है जहाँ दो वितरणों में सहसम्बन्ध ज्ञात करना होता है।

बहुरूपी प्रतिदर्श के लाभ

(i) इस विधि में त्रुटियों की सम्भावना कम रहती है।

(ii) यह विधि प्रतिदर्श की विष्वसनीयता का परीक्षण एवं वांछनीय परिणामों की प्राप्ति में उचित दिषा निर्देशित करती है।

बहुरूपी प्रतिदर्शन की सीमांए

(i) इस विधि का प्रयोग केवल छोटे प्रतिदर्ष के चयन में ही, हो सकता है।

(ii) इस विधि में समय बहुत अधिक लगता है।

(ङ) समूह प्रतिदर्शन (Cluster Sampling)

इस विधि में हम जनसंख्या को विभिन्न वर्गों में, जिनमें विभिन्न गुणें का समावेश रहता है, विभाजित कर देते हैं। इन वर्गों को समूह (cluster) कहते हैं। इसके पश्चात इन समूहों से यादृच्छिक विधि द्वारा प्रतिदर्शों का चयन कर लेते हैं। इस विधा में यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक समूह अपनी जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करता

है। ऐसी प्रतिदर्शन प्रणाली का प्रयोग भौगौलिक एवं पर्यावरण अध्ययनों में किया जाता है।

उदाहरणः— यदि इलाहाबाद षहर के उपभोक्ताओं का, नये खुल रहे शापिंग मालों के प्रति मनोवृत्ति का अध्ययन करना हो तो इलाहाबाद शहर को 20 या 25 खण्डों में बांट देगें। हम यह मान लेगें कि यह खण्ड पूरे इलाहाबाद शहर के उपभोक्ताओं का प्रतिनिधित्व करते हैं। इन खण्डों को समूह (cluster) मान कर इनमें से यादृच्छिक (random) विधि से प्रतिदर्शों का चयन कर लेगें।

समूह प्रतिदर्शन के लाभ

(i) इस विधि का सबसे बड़ा लाभ है समय श्रम एवं लागत की मितव्यतता

(ii) यह विधि षोध/अनुसंधान की एक व्यवहारिक विधि है।

समूह प्रतिदर्श की सीमांए

(i) पूर्णरूप से समान गुणों तथा विशेषताओं वाला समूह बनाना एक कठिन कार्य होता है।

(ii) दोषपूर्ण समूह बन जाने से परिणाम भ्रामक हो जाते हैं।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 9. समूह प्रतिदर्शन से आप क्या समझते है।

(च) बहुचरणीय प्रतिदर्शन (Multistage Sampling)

बहुचरणीय प्रतिदर्शन प्रणाली (Multistage Sampling) समूह प्रतिदर्शन प्रणाली (cluster sampling) का ही सुधरा हुआ रूप है।

समूह प्रतिदर्शन प्रणाली में चुनी गई इकाइयों में प्रतिदर्श चयनित किये जाते है, जबकि बहुचरणीय प्रतिदर्श प्रणाली में प्रतिदर्श के लिये इकाइयां दो तीन या चार चरणों में चुनी जाती है। इस विधि में प्रथम चरण में जनसंख्या से प्रतिदर्श इकाइयों को चुन लेते हैं। दूसरे चरण में उन्हीं प्रतिदर्शों को विभिन्न इकाइयों में बांट देते है और उनसे पुनः प्रतिदर्श चयनित करते हैं। इसी प्रकार से आवश्यकतानुसार तीसरे और चौथे चरण में प्रतिदर्शों को चयनित किया जाता है। इस विधि की विशेषता यह होती है कि प्रत्येक चरण में प्रतिदर्श के आकार में कमी होती जाती है। उदाहरण के लिये यदि चुनाव विश्लेषण (psephology) करने वाले विधान सभा चुनाव की मतदान निकासी पुर्वानुमान (exit poll forecasting) करने के लिये प्रथम चरण में किसी राज्य को विभिन्न विधान सभा क्षेत्रों में विभाजित करेंगे तथा उनमें से कुछ विधान सभा क्षेत्रों की प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करेंगे। दूसरे चरण में उन प्रतिदर्श विधान सभा क्षेत्रों को विभिन्न खण्डों में विभाजित कर देगें और उनमें से कुछ प्रतिदर्श इकांइया चुन लेगें। तृतीय चरण में इन चयनित खण्डों की या तो जनगणना कर लेगें या उनमें से कुछ प्रतिदर्शों का अध्ययन कर के पूर्वानुमान के परिणाम दे देगें।

बहुस्तरीय प्रतिदर्शन विधि के लाभ

(i) इस प्रणाली में न्यूनतम लागत में परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

(ii) यह प्रणाली अत्यन्त लोचपूर्ण है जिसमें विभिन्न स्तरों पर प्रतिदर्श चयन की विभिन्न विधियां प्रयोग की जाती है।

(iii) विशाल भौगोलिक क्षेत्र का अध्ययन करने के लिये यह प्रणाली बहुत ही उपयुक्त है।

बहुस्तरीय प्रतिदर्शन विधि की सीमांए

(i) यह विधि थोड़ी जटिल है और इसमें समय भी अधिक लगता है।

(ii) यदि विभिन्न चरणों पर चुनी गयी प्रतिदर्श इकाइयां प्रतिनिधिक न हुईं तो भ्रामक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

1.6.2 असम्भाव्य प्रतिदर्शन (Non probability Sampling)

असम्भाव्य प्रतिदर्शन विधि में प्रतिदर्श के चयन में सम्भावना का स्थान नहीं रहता है। किसी इकाई के चुने जाने की सम्भावना अज्ञात रहती है। इस विधि में प्रतिदर्श इकाईयों को चुने जाने में शोधकर्ता अपने विवेक से निर्णय लेता है। बहुधा असम्भाव्य प्रतिदर्श, जनंसख्या के उचित प्रतिनिधि नहीं कहे जा सकते है। इस विधि से चयनित प्रतिदर्शों से प्राप्त परिणामों का सामन्यीकरण नहीं किया जा सकता है।

असम्भाव्य प्रतिदर्शन की विशेषतांए

(i) इस प्रकार के प्रतिदर्श की चयन प्रक्रिया सरल होती है।

(ii) असम्भाव्य प्रतिदर्श के प्राप्ताकों का वितरण स्वतन्त्र होता है।

(iii) असम्भाव्य प्रतिदर्शन विधि छोटे स्तरों के शोध कार्यों में बहुत उपयोगी सिद्ध होती है।

असम्भाव्य प्रतिदर्शन की सीमाएं

(i) इस विधि से प्राप्त परिणामों का सामान्यीकरण नहीं किया जा सकता है।

(ii) यह विधि शोधकर्ता के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह से प्रभावित हो सकती है।

असम्भाव्य प्रतिदर्शन के प्रकार (Types of Non Probability Sampling)

क. निर्णित प्रतिदर्शन (Judgement Sampling)

जैसा कि नाम से स्पष्ट है, प्रतिदर्श इकाइयों का चयन शोधकर्ता के विवेक अथवा समझबूझ पर निर्भर करता है। इस विधि में जनसंख्या के जिन गुणों का अध्ययन करना होता है वही गुण शोधकर्ता के निर्णय का आधार होता है। इसे उद्देश्यीय प्रतिदर्शन (Purposive Sampling) भी कहा जाता है।

उदाहरण के लिये किसी वि0वि0 के बी0काम0 प्रथम वर्ष के छात्रों की व्यय करने की आदत का अध्ययन करने के लिये शोधकर्ता ऐसे छात्रों का चयन करेगा जिनकी व्यय करने की आदत सामान्य है, अर्थात न तो मितव्ययी है और न तो फिजूल खर्च हो। यहां पर शोधकर्ता अपनी समझबूझ से प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करेगा।

निर्णित प्रतिदर्शन की विशेषताएं

(i) यह धन, समय एवं शक्ति की बचत कराती है।

(ii) इस विधि द्वारा चयनित प्रतिदर्श इकाइयों का समग्र अध्ययन हो सकता है।

(iii) एक प्रतिदर्श समूह की तुलना दूसरे प्रतिदर्श समूह से सरलतापूर्वक की जा सकती है।

निर्णित प्रतिदर्शन की सीमाएं

(i) यह विधि विषय परक (Objective) नहीं होती है, क्योंकि इसकी तकनीकी दोषपूर्ण मानी जाती है।

(ii) इसकी विश्वसनीयता भी संदिग्ध रहती है।

(iii) इसके परिणामों का सामान्यीकरण नहीं किया जा सकता है।

ख. सुविधाजन्य प्रतिदर्शन (Convenience Sampling)

इसके भी नाम से ही स्पष्ट है कि जो प्रतिदर्श सुविधा पूवर्क उपलब्ध हो उन्हें ही चयनित किया जाय। उदाहरण के लिये यदि शापिंग माल में कार्य करने वाले विक्रय कार्मिकों (Salesmen) को दिये जाने वाले अतिरिक्त कार्य पारिश्रमिक (Overtime Wages) का अध्ययन करना हो तो शोधकर्ता निकटतम शांपिग माल के जाकर प्रतिदर्श का चयन कर लेगा। इस प्रकार के प्रतिदर्श चयन में केवल सुविधा का ध्यान रखा जाता है अन्य किसी विधि का नही। प्रारम्भिक चरण के अनुसन्धानों में वह विधि उपयोगी होती है।

सुविधाजन्य प्रतिदर्शन की विशेषताएं

(i) जिस प्रतिदर्श का चयन किया जाता है उसका सम्पूर्ण अध्ययन किया जा सकता है।

(ii) यह अत्यंत सरल एवं सुगम विधि है।

(iii) क्रियात्मक एवं वैज्ञानिक अनुसन्धानों में यह विधि उपयुक्त सिद्ध होती है।

(iv) इसके लिये कोई पूर्वनियोजित कार्यक्रम नहीं बनाना पड़ता है। इसी कारण धन एवं समय की बचत होती है।

सुविभाजन्य प्रतिदर्शन की सीमाएं

(i) इस विधि द्वारा चयनित प्रतिदर्शों को जनसंख्या का प्रतिनिधि नहीं कहा जा सकता है।

(ii) इस विधि का प्रयोग केवल ''मार्गदर्शी अध्ययन'' (Pilot Studeis) में ही किया जा सकता है।

ग. नियतांश प्रतिदर्शन (Quota Sampling)

इस विधि को यथांश प्रतिदर्शन भी कहा जाता है। इस विधि में प्रतिदर्शों का चयन विभिन्न स्तरों से पूर्व निर्धारित योजना के अन्तर्गत किया जाता है। इस विधि में प्रतिदर्शों को प्रतिनिधिक बनाने हेतु जनसंख्या को विभिन्न गुणों जैसे आयु, लिंग, शिक्षा, व्यवसाय एवं आय इत्यादि के आधार पर विभाजित कर दिया जाता है। इसके पश्चात शोधकर्ता को इन विभिन्न गुणों का नियतांश (Quota) निश्चित बता दिया जाता है जिसे प्रतिदर्श के रूप में चयनित किया जाता हैं। इस प्रकार की प्रतिदशर्न विधि का उद्देष्य होता है कि विभिन्न गुणों का प्रतिदर्श के रूप में चयन प्रांसगिक रूप से होता रहे। यह विधि स्तरीय प्रतिदर्शन विधि के समान प्रतीत होती है परन्तु दोनों में अन्तर

होता है। स्तरीय प्रतिदर्शन विधि में प्रतिदर्शों का चयन यादृच्छिक (Random) रूप से होता है जबकि इस विधि में जनसंख्या के विभिन्न गुणों का नियतांश (Quota) पूर्व निर्धारित रहता है। इस विधि का प्रयोग बहुधा बाजार एवं विपणन से सम्बन्धित शोधों में अधिक होता है।

नियतांश प्रतिदर्शन की विशेषताएं

(i) इस विधि की सबसे बड़ी विशेषता है कि इसमें चयनित प्रतिदर्श पूर्व नियोजित गुणों की संख्या के अनुरूप होते हैं।

(ii) इस विधि में स्तरीय प्रतिदर्शन एवं निर्णित प्रतिदर्शन दोनो विधियों का समावेष रहता है।

नियतांश प्रतिदर्शन की सीमाएं

(i) इस प्रकार से चयनित प्रतिदर्श, शोधकर्ता के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह (bias) से प्रभावित रहते हैं।

(ii) यदि गुणों के स्तरों की संख्या अधिक हो जाती है तो नियतांश (Quota) निर्धारित करना कठिन हो जाता है।

(iii) इस बात की सम्भावना भी रहती है कि किसी गुण विशेष स्तर से निर्धारित नियतांश की संख्या प्राप्त ही न हो पाये।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 10. असम्भाव्य प्रतिदर्शन से क्या समझते हैं। असम्भाव्य प्रतिदर्शन के प्रकारों का वर्णन करिये।

1.7 प्रतिदर्श अन्वेषण एवं समकों का संग्रहण (Sample Enquiry and Data Colletion)

प्रतिदर्शों के चयन होने के बाद का अगला चरण होता है उन

प्रतिदर्श इकाइयों से समकों का संग्रहण करना इस कार्य के लिये शोधकर्ता को समकों कें संग्रहण की किसी उपयुक्त विधि का चयन करना पड़ता हैं। शोध के परिणामों की विश्वसनीयता बहुत सीमा तक समकों के चयन की विधि पर निर्भर करती है। यदि समकों का चयन उचित विधि से नहीं किया गया है तो प्रतिदर्श चयन की उत्तम विधि के होते हुए भी परिणाम शुद्ध नहीं प्राप्त होते हैं। समको के संग्रहण में छोटी सी चूक, चाहे प्रश्नावली का दोषपूर्ण होना, चाहे शोधकर्ता का पूर्वाग्रह होना इत्यादि परिणाम को भ्रामक बना देती है। इसलिए समकों के संग्रहण का कार्य बहुत ही सावधानी से करना चाहिए। प्रतिदर्शों के उत्तम चयन से ही परिणाम शुद्ध एवं विश्वसनीय होगें एंसा नहीं मान लेना चाहिए।

समकों के संग्रहण के बाद उनसे निष्कर्ष निकाले जाते हैं। हम यह जान चुके हैं कि प्रतिदर्शों के अध्ययन से समग्र/जनसंख्या के विषय में निष्कर्ष निकाले जाते हैं अतएव उनका सामान्यीकरण बहुत सावधानी के साथ करना चाहिए। कभी–कभी यह शंका उत्पन्न हो सकती है कि परिणाम समग्र/ जनसंख्या के लिए कितने उचित हैं। ऐसे अध्ययनों में परिणामों के संदर्भ में शोधकर्ता को लोचपूर्ण विचारभाव रखने चाहिए, एवं परिणामों को सम्भाव्यता के दृष्टिकोण से प्रस्तुत करना चाहिए तथा उन सीमाओं को भी प्रकट कर देना चाहिये–जिनके अन्दर परिणामों में किंचित परिवर्तन हो सकता है।

1.8 प्रतिदर्श का आकार (Size of Samples)

शोधकर्ता के समक्ष प्रथम प्रश्न यह होता है कि प्रतिदर्श का आकार क्या हो ? प्रतिदर्श में कितनी इकाइयों को सम्मिलित किया

जाय जिससे कि जनसंख्या का शुद्ध रूप से प्रतिनिधित्व हो सके और विश्वसनीय परिणाम प्राप्त हों। अनुसंधानों के परिणामों की शुद्धता और विश्वसनीयता प्रतिदर्श के आकार पर निर्भर करती है। जितना बड़ा प्रतिदर्श होगा, जनसंख्या का प्रतिनिधित्व उतना ही व्यापक होगा एवं उनसे प्राप्त परिणाम उतने ही शुद्ध एवं विश्वसनीय होंगे। बड़े प्रतिदर्शो में मापन की त्रुटि भी न्यूनतम अथवा शून्य हो जाती है। यदि प्रतिदर्श का आकार अनन्त ले लिया जाय तो त्रुटि शून्य हो जाती है।

शोध की प्रकृति, परिणामों की शुद्धता तथा जनसंख्या की विषमता, प्रतिदर्श के आकार को निर्धारित करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते है। परिणामों में जितनी शुद्धता तथा विश्वसनीयता वांछित हो, प्रतिदर्श का आकार उतना ही बड़ा करना पड़ेगा। प्रतिनिधिक अथवा ठेठ (Typical) रूप से विश्वसनीयता के स्तर 95 प्रतिशत एवं 99 प्रतिशत देखे जाते हैं। उसी तरह से परिशुद्धता की मान्यताएं 1 प्रतिशत अथवा 5 प्रतिशत देखी जाती हैं। परिणामों की शुद्धता एवं विश्वसनीयता तय कर लेने के पश्चात् शोधकर्ता विभिन्न सूत्रों की सहायता से इनका निर्धारण कर सकता है निम्न पंक्तियों में उनमें से प्रमुख सूत्रों का उल्लेख किया जा रहा है।

(1) यदि परिणामों को प्रतिदर्श प्रतिक्रिया के अनुपात के रूप में प्रस्तुत करना हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:–

$$n = \frac{P-(1-P)}{\frac{A^2}{Z^2}+\frac{P(1-P)}{N}}$$

n= प्रतिदर्श का आकार (Sample Size)

P= जनसंख्या का वह अनुमानित प्रतिशत जो गुणों को समाहित करता है (estimated parcentage of the population possesing attribute of intrest)

A= वांछित शुद्धता, (जैसे 0.01, 0.05) (desired accuracy i.e. 0.01, 0.05)

Z= प्रमापीकष्त मूल्य जो विष्वसनीयता का स्तर इंगित करते हों

जैसे कि : Z = 1.96, 95% विष्वसनीयता के स्तर पर, Z=2.56, 99% विष्वसनीयता के स्तर पर (Standardized value indicating a confidence level. (Z=1.96 at 95% confidence level and Z= 2.56 at 99% confidence level).

N= जनसंख्या का आकार (population size)

(2) यदि शोधकर्ता परिणामों को प्रतिदर्श पर प्रतिक्रिया के औसत के रूप में प्रस्तुत करना चाहता हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

$$n = \frac{\sigma^2}{\frac{A^2}{Z^2}+\frac{\sigma^2}{N}}$$

n= प्रतिदर्श का आकार

σ = प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

A = वांछित शुद्धता (जैसे 0.01, 0.05.......) (desired accuracy i.e. 0.01, 0.05.....)

Z= प्रमापीकृत मूल्य जो विश्वसनीयता का स्तर इंगित करते हों

जैसे कि Z=1.96, 95% विश्वसनीयता के स्तर पर, z=2.56, 99% विश्वसनीयता के स्तर पर) Standardized value indicating a confidence level (Z=1.96 at 95% onfidence Level, and z= 2.56 at 99% Confidence Level)

N= जनसंख्या का आकार (size of population)

(3) यदि शोधकर्ता परिणामों को विभिन्न तरीके से प्रस्तुत करना चाहता है या उसे अनुपातों, प्रमाप विचलन, अथवा गुण सम्बन्धों का अनुमान करने में कठिनाई आ रही हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग उपयोगी होगा।

$$n = \frac{NZ^2 \times 2.5}{[d^2 \times (n-1)] + [(Z^2 + 2.5)]}$$

n= प्रतिदर्श का आकार

d= परिशुद्धता का स्तर (i.e. 0.01, 0.05, 0.10...) (Precision level i.e 0.01, 0.05, 0.10....)

Z= प्रमापीकृत मूल्य जो विश्वसनीयता का स्तर इंगित करते हों

जैसे कि Z=1.96, 95% के स्तर पर, या Z=2.56, 99% के स्तर पर) (Standardized value indicating a confidence level (Z=1.96 at 95% confidence level and Z=2.56 at 99% confidence level).

N= जनसंख्या का आकार (size of population)

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 11. प्रतिदर्श के आकार से परिणामों की शुद्धता के सम्बन्ध को स्पष्ट करिये।

1.9 प्रतिदर्शन त्रुटियां (विभ्रम) (Sampling Erors)

अब तक के अध्ययन से हम यह जान चुके हैं कि प्रतिदर्श सर्वेक्षण में जनसंख्या के छोटे से भाग का अध्ययन होता है, एवं इससे प्राप्त परिणामों और जनगणना से प्राप्त परिणामों में अन्तर होता हैं अतः प्रतिदर्श सर्वेक्षण से प्राप्त परिणाम में त्रुटि का होना स्वाभाविक हैं यह त्रुटि सदैव ही रहेगी चाहें प्रतिदर्श यादृच्छिक हो अथवा जनसंख्या का अधिकतम प्रतिनिधित्व करते हों। इन त्रुटियों का कारण प्रतिदर्शन का आकार एवं विधि को माना जाता है। इसे ही प्रतिदर्शन की त्रुटि या विभ्रम कहते हैं। यह भी देखा जाता है कि एक ही शोध को यदि दो प्रतिदर्शन विधियों से सम्पादित किया जाय तो भी उनसे प्राप्त परिणामों में अन्तर हो जाता है। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि त्रुटि या विभ्रम प्रतिदर्श सर्वेक्षण में ही पायी जाती है। जनगणना सर्वेक्षण में त्रुटि या विभ्रम शून्य रहती है।

प्रतिदर्शन की त्रुटियों (विभ्रम) के कारण (Causes of Sampling Erors)

प्रतिदर्शन की त्रुटियों के निम्न कारण हैं–

(1) प्रतिदर्शो का दोषपूर्ण चयन (Faulty Selection of Samples)

प्रतिदर्शो के चयन में शोधकर्ता का व्यक्तिगत पूर्वाग्रह (bias) इसका प्रमुख कारण होता हैं इस दोश को बहुत सीमा तक दूर किया जा सकता है यदि दृढ़ता के साथ यादृच्छिक प्रतिदर्शन किया जाय।

(2) प्रतिदर्शो का प्रतिस्थापन (Substitution of Samples)

यदि किसी विशेष प्रतिदर्श इकाई का चयन नहीं हो पाता है तो अन्वेषणकर्ता उनका प्रतिस्थापन (Substitution) दूसरी उपलब्ध इकाई

से कर देता है। इस क्रिया से एक पूर्वाग्रह (bias) हो जाता है क्योंकि प्रतिस्थापित इकाई के गुण मूल इकाई के गुणों से सदैव भिन्न होगें।

(3) प्रतिदर्श इकाइयों की दोषपूर्ण सीमांकन (Faulty Demarcation of Sample Units)

ऐसे शोधकार्यों में जहां सीमारेखा या किसी सीमा पर अन्त होने वाले प्रतिदर्शों का चयन करना होता है वहां पर भी त्रुटियों की प्रबल सम्भावना रहती है। इन मामलों में शोधकर्ता का व्यक्तिगत निर्णय महत्वपूर्ण हो जाता है कि प्रतिदर्श को चयनित किया जाय अथवा नहीं।

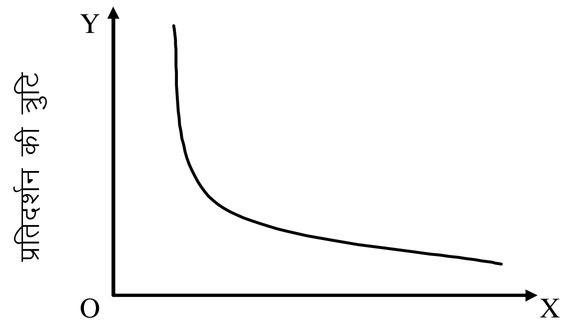
(4) पूर्वानुमान करने की विधि में पूर्वाग्रह के कारण त्रुटि (Erors Due to Bias in Estimation Method)

पूर्वानुमान करने की अनुचित विधि का चयन करने से भी त्रुटि की सम्भावना रहती है।

(5) जनसंख्या की विषमता के कारण त्रुटि (Erors Due to Heterogenity of Population)

जनसंख्या की विषमता भी त्रुटि का कारण होती है। इन त्रुटियों की एक विशेषता होती है कि यह एक दूसरे को समाप्त कर देती है। प्रमाप त्रुटि (विभ्रम) (standred error) के द्वारा प्रतिदर्शन की त्रुटि (विभ्रम) का मापन किया जाता है। प्रतिदर्शन की त्रुटि (विभ्रम) की जानकारी होने एवं उसका मापन होने से अनिश्चितता को बहुत सीमा तक दूर किया जा सकता है। संक्षेप में यही कहा जा सकता है कि जितना विशाल प्रतिदर्श का आकार होगा, शोध के परिणाम उतने ही शुद्ध होगें। प्रतिदर्श का आकार घटने या बढ़ने के विपरीत

अनुपात में त्रुटि का सम्बन्ध होता है। इस विशेषता को निम्न रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है–



प्रतिदर्श का आकार

प्रतिदर्शन त्रुटियो का नियंत्रण (Control of Sampling Errors)–

यद्यपि यह सम्भव नहीं हो सकता है कि प्रतिदर्शन की त्रुटियों को सम्पूर्ण रूप से दूर कर दिया जाय पर यदि निम्न बिन्दुओं पर ध्यान दिया जाय तो बहुत सीमा तक प्रतिदर्शन की त्रुटियों को कम किया जा सकता है–

- एक अच्छी प्रश्नवली की संरचना
- प्रतिदर्श चयन की उपयुक्त विधि का चुनाव
- प्रतिदर्श के आकार को पर्याप्त रखना
- समंको के प्रसंस्करण को सावधानी पूर्वक करना इत्यादि।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 12. प्रतिदर्शन की त्रुटि (विभ्रम) से आप क्या समझते हैं। इनसे किस प्रकार बचा जा सकता है ?

1.10 गैर प्रतिदर्शन त्रुटियाँ (Non Sampling Errors)

गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियाँ, सम्भावना पर निर्भर नहीं करती है। यह मुख्यतयः दोषपूर्ण शोध प्रारूप (Research Design) अथवा षोध की योजना के दोषपूर्ण क्रियान्वन के कारण उत्पन्न होती हैं। यह त्रुटियाँ ऐसे कारणों से होती है जिसकी शोधकर्ता पहले से रोकथाम कर सकता है। इनके कारणों को ज्ञात किया जा सकता है। यह कारण शोध प्रक्रिया के किसी भी चरण (Stage) में उभर कर आ सकते हैं। जैसे शोध की रूपरेखा बनाते समय, उसका क्रियान्वयन करते समय, समंको का संग्रहण करते समय, अथवा समंको का विश्लेषण करते समय। गैर प्रतिदर्शन त्रुटियाँ, जनगणना सर्वेक्षण एवं प्रतिदर्श सर्वेक्षण, दोनों ही विधियों में पायी जाती हैं। ऐसी त्रुटियाँ शोध के आकार के साथ ही घटती बढ़ती हैं। जनगणना पद्धति में ऐसी त्रुटियाँ–प्रतिदर्शन पद्धति की तुलना में अधिक होती हैं। इस प्रकार की त्रुटियों के विभिन्न स्रोतों का विवरण अग्रलिखित है।

1.10.1 गैर प्रतिदर्शन त्रुटियों के स्रोत (Sources of Non Sampling Errors)

(i) प्रतिदर्श चयन की त्रुटि (Sample Selection Error)

प्रतिदर्श की योजना का क्रियान्वयन एक कठिन कार्य है। कभी–कभी ऐसा होता है कि परिस्थितिजन्य कारणों से लक्षित प्रतिदर्श (targeted sample) नहीं चयनित हो पाते हैं। उदाहरण के लिये बाजार में विपणन से सम्बन्धित प्रतिदर्श का चयन यदि प्रातः 10 से सांय 5 तक के बीच में किया जाय तो नौकरी एवं

अन्य व्यवसाय वाले व्यक्ति छूट जायेंगे और चयनित प्रतिदर्श प्रतिनिधिक चरित्र का नहीं होगा।

(ii) अन्वेषण का छल (Cheating in Investigation)

कभी–कभी अन्वेषण करने वाला व्यक्ति समंकों को बनावटी तरीके से, सम्बन्धित व्यक्तियों से मिले बिना ही प्रयोग कर लेता है। यह एक ऐसी त्रुटि है जो अन्वेषणकर्ता को ज्ञात रहती है। शोधकर्ताओं को इस प्रकार की जानबूझ कर की गयी त्रुटि से बचना चाहिए। समकों का विश्लेषण करने से पहले समकों की सच्चाई को परखने का प्रयास करना चाहिए।

(iii) अन्वेषणकर्ता द्वारा त्रुटि (Error by Investigator)

बहुधा अन्वेषणकर्ता प्रत्यर्थी से प्राप्त सूचनाओं को बिना सही तरीके से, समझे अभिलिखित कर लेता है अथवा प्राप्त सूचनाओं को जाँचे परखे बिना ही सच मान कर स्वीकार कर लेता है। ऐसे मामलों में प्रारम्भ से ही त्रुटि उपस्थित रहती है और परिणामों की विश्वसनीयता प्रभावित होती है।

(iv) समकों के प्रसंस्करण में त्रुटि (Error in Data Processing)

समकों के संकलन के बाद के चरण में शोधकर्ता समकों को सम्पादित करता है, कूटबद्ध करता है एवं उनका सांख्यिकीय विश्लेषण या तो स्वयं या कम्प्यूटर की सहायता से, उनका प्रसंस्करण करता है। इस चरण में गणितीय त्रुटि शोधकर्ता से स्वयं हो सकती है अथवा कम्प्यूटर में समकों के प्रविष्टि (data entry) के साथ त्रुटि हो सकती है। इस चरण में सावधानी का प्रयोग करने से इन त्रुटियों से बचा जा सकता है।

1.10.2 गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियों को दूर करना (Avoiding Non Sampling Errors)

हमको ज्ञात है कि जनगणना पद्धति में प्रतिदर्श त्रुटियों की सम्भावना शून्य रहती है, तथा यह त्रुटियाँ प्रतिदर्श पद्धति में ही दृष्टिगोचर होती है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण में दोनों प्रकार की त्रुटियाँ पाई जाती है जिनका अध्ययन हम उपरोक्त पक्तियों में कर चुके हैं। गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियों को बहुत सीमा तक दूर किया जा सकता है यदि निम्न बिन्दुओं पर ध्यान दिया जायः–

- सर्वेक्षण कार्य में प्रशिक्षित एवं योग्य व्यक्तियों को ही लगाना चाहिये।
- समकों के प्रसंस्करण में परिष्कृत विधियों का प्रयोग करना चाहिए।
- शोधों मे ंमार्गदर्शी सर्वेक्षण (Pilot Survey) यदि सम्भव हो तो अवश्य करा लेना चाहिए।
- समकों की उचित जाँच एवं सम्पादन पर बल देना चाहिए।
- ऐसे मामलों में जहाँ प्रतिक्रिया नहीं प्राप्त हो रही हों उनका अनुवर्तन (follow-up) अवश्य करना चाहिए।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 13. गैर प्रतिदर्षन की त्रुटियों के स्रोत एवं उनको दूर करने के उपायों की व्याख्या करिये।

1.11 सारांश (Summary)

प्रतिदर्श जनसंख्या का एक छोटा रूप होता है जिसके अध्ययन से जनसंख्या के गुणों का अनुमान लगाया जाता है। पूरी

जनसंख्या के अध्ययन को जनगणना कहते है। जनगणना की तुलना में प्रतिदर्श अध्ययन कम खर्चीला, समय की बचत करने वाला होता है। यदि प्रतिदर्शों का चयन उचित प्रकार से किया गया हो तो इसके अध्ययन से प्राप्त परिणाम शुद्ध एवं विश्वसनीय होते है।

प्रतिदर्शन के विभिन्न नियम जैसे सांख्यकीय नियमितता का सिद्धान्त, महांक जड़ता का सिद्धान्त, सांख्यकीय दृढ़ता का सिद्धान्त, सांख्यकीय अनुकूलता का सिद्धान्त, इत्यादि शोधकर्ता का प्रतिदर्शो के चयन में मार्गदर्शन करते है।

प्रतिदर्शों के चयन की विधियों को मुख्यतः दो वर्गों में विभाजित किया गया है, सम्भाव्य प्रतिदर्श एवं असम्भाव्य प्रतिदर्श। साधारण यादृच्छिक प्रतिदर्शन सम्भाव्य प्रतिदर्शन की एक लोकप्रिय विधि है जिसका व्यापक प्रयोग किया जाता है। क्रमिक प्रतिदर्शन, स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्शन, आदि सम्भाव्य प्रतिदर्श चयन की अन्य विधियाँ हैं। असम्भाव्य प्रतिदर्श के अन्तर्गत निर्णित प्रतिदर्शन, सुविधाजन्य प्रतिदर्शन, एवं नियतांश प्रतिदर्शन आदि विधियाँ आती हैं जिनका प्रयोग परिस्थित एवं शोध की प्रकृति के आधार पर शोधकर्ता द्वारा किया जाता है।

प्रतिदर्श के चयन के पश्चात अगले चरण में प्रतिदर्श इकाइयों से समंकों का संकलन किया जाता है। समंकों के उचित चयन से ही परिणामों की शुद्धता एवं विश्वसनीयता निर्धारित होती है।

प्रतिदर्श के आकार का निर्धारण भी एक महत्वपूर्ण बिन्दु है जो परिणामों की शुद्धता एवं विश्वसनीयता को निर्धारित करता है। बड़े आकार के प्रतिदर्श से अधिक शुद्ध एवं विश्वसनीय परिणाम प्राप्त होते

हैं एवं त्रुटि की सम्भावना भी न्यूनतम रहती है।

प्रतिदर्शन अध्ययन में जनसंख्या के छोटे भाग का अध्ययन होता है अतः इससे प्राप्त परिणामों में त्रुटि का होना स्वाभाविक होता है। प्रतिदर्शन अध्ययन से प्राप्त परिणामों में, जनगणना से प्राप्त परिणामों के परिपेक्ष्य में, त्रुटि सदैव रहती है। प्रतिदर्शन की त्रुटियों के प्रमुख कारण होतें हैं, प्रतिदर्शों का दोशपूर्ण चयन, प्रतिदर्श इकाइयों का दोषपूर्ण सीमांकन, पूर्वाग्रह एवं जनसंख्या की विषमता आदि। यदि शोधकर्ता सजग रहे एवं प्रश्नावली, प्रतिदर्श के आकर एवं समंकों के प्रसंस्करण पर ध्यान दे तो प्रतिदर्श की त्रुटियों को न्यूनतम किया जा सकता है। गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियां मुख्यतयः दोषपूर्ण शोध प्रारूप एवं शोध योजना के दोषपूर्ण क्रियान्वन के कारण उत्पन्न होती है। इन त्रुटियों का कारण बहुधा मानवीय हुआ करता है, अतः इनकी रोकथाम की जा सकती हैं। गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियों को, यदि वांछित सावधानी, जैसे योग्य अन्वेषणकर्ताओं की नियुक्ति, प्रसंस्करण में उचित विधि का चुनाव, मार्गदर्शी सर्वेक्षण, समंकों की जांच इत्यादि बिन्दुओं पर ध्यान दिया जाय तो, बहुत सीमा तक दूर किया जा सकता है।

1.12 शब्दावली (Terminology)

प्राचल (Patameter)–सांख्यकी के विभिन्न मापनों द्वारा समग्र अथवा जनसंख्या की विशेषता को प्रकट करना

सांख्यकीय (Statistic)–सांख्यकी के विभिन्न मापनो द्वारा प्रतिदर्श की विशष्ताता को परिभाषित करना

महांक जड़ता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)–बड़ी

मात्रा अथवा संख्या में प्रतिपूर्ति एवं स्थिरता

दृढ़ता का सिद्धान्त (Principal of Persistence)–जनसंख्या के वह मूल गुण जिनका स्वरूप सदा बना रहता है।

- **जनगणना (Census)**–जनसंख्या का सम्पूर्ण अध्ययन
- **प्रतिदर्ष (Sample)**–जनसंख्या की प्रतिनिधि इकाई
- **प्रतिदर्ष सर्वेक्षण (Sample Survey)**–जनसंख्या की प्रतिनिधि इकाई का अध्ययन

यादृच्छिक प्रतिदर्शन (Random Sampling)–प्रतिदर्शन का वह रूप जिसमें जनसंख्या के प्रत्येक इकाई के चुने जाने की समान सम्भावना हो।

स्तरीय प्रतिदर्शन (Stratified Sampling)–जनसंख्या को स्तरों में विभाजित कर के प्रतिदर्श इकाइयों का चयन

क्रमिक प्रतिदर्शन (Systematic Sampling)–प्रतिदर्श इकाइयों का पूर्व निर्धारित क्रम से चयन

स्तरीय यादृच्छिक प्रतिदर्शन (Stratified Random Sampling)–विभिन्न स्तरो के माध्यम से प्रतिदर्श इकाइयों का यादृच्छिक चयन

समूह प्रतिदर्शन (Cluster Sampling)–जनसंख्या को विभिन्न वर्गो में, जिनमें विभिन्न गुणों का समावेश रहता है, विभाजित करना। इन वर्गो को समूह कहतें हैं इन समूहों से यादृच्छिक विधि द्वारा प्रतिदर्शों का चयन।

बहुचरणीय प्रतिदर्शन (Multi Stage Sampling)–प्रतिदर्श के लिये इकाइयों का दो, तीन, या चार चरण में चयन

निर्णित प्रतिदर्शन (Judgement Sampling)–शोधकर्ता के विवेक द्वारा प्रतिदर्श इकाइयों का चयन

सुविधाजन्य प्रतिदर्शन (Convenience Sampling)–सुविधा पूर्वक उपलब्ध प्रतिदर्श इकाइयो का चयन

नियतांश प्रतिदर्शन (Quota Sampling)–पूर्व निर्धारित योजना के अन्तर्गत प्रतिदर्शों का चयन

गैर प्रतिदर्शन त्रुटियां (Non Sampling Errors)–ऐसी त्रुटियां जो प्रतिदर्शन प्रक्रिया से नहीं उत्पन्न होती है वरन् मानवजनित कारणों से अधिकतर घटित होती है।

अन्वेषण का छल (Cheating in Investigation) – अन्वेशणकर्ता द्वारा जानबूझकर समकों को बनावटी तरीके से प्रयोग करना।

1.13 स्वमूल्यांकन प्रश्न संभावित उत्तर (Self Assessment Questions : Possible Answers)

(1) इस प्रश्न के उत्तर में आपको प्रतिदर्श की परिभाषा एवं अर्थ पूर्ण रुप से लिखना होगा।

(2) यहां पर आपको समग्र जनसंख्या एवं प्रतिदर्श को परिभाषित करना होगा एवं प्रतिदर्श एवं जनसंख्या के अन्तर को स्पष्ट करना होगा। आपको बताना होगा कि प्रतिदर्श जनसंख्या से ही लिये जाते है।

(3) इस प्रश्न के उत्तर में आपको समष्टि एवं प्रतिदर्श को संक्षेप में लिखकर प्राचल तथा सांख्यिकी के विषय में लिखना होगा।

इनके संकेतों को भी बताना होगा।

(4) एवं (5) इन प्रश्नों के उत्तर में दोनों नियमों को विस्तार से उदाहरण सहित लिखना होगा।

(6) इस प्रश्न के उत्तर में आपको यादृच्छिक प्रतिदर्शन को विस्तार से लिखकर विधियों का उल्लेख करना है।

(7) क्रमिक प्रतिदर्शन की विधि एक उदाहरण के साथ लिखिए।

(8) इस प्रश्न के उत्तर में स्तरित प्रतिदर्शन को विस्तार से तथा समूह प्रतिदर्शन को संक्षेप में लिखकर अन्तर स्पष्ट करिए।

(9) यहां पर समूह प्रतिदर्शन की परिभाषा एवं उदाहरण दीजिए।

(10) इस प्रश्न के उत्तर में असम्भाव्य प्रतिदर्शन की सभी विधियों को संक्षेप में लिखिए।

(11) उत्तर में औसत एवं अनुपात के रूप में प्रस्तुत करने के सूत्रों को भी लिखिए।

(12) उत्तर में त्रुटियों को एवं उनके कारणों को तथा त्रुटियों के नियन्त्रण के उपायों को लिखिए।

(13) इस प्रश्न के उत्तर में आपको गैर प्रतिदर्शन की त्रुटियां के स्रोत एवं उनको दूर करने के उपायों को विस्तार से लिखना होगा।

1.14 उपयोंगी पुस्तकें (Suggested Readings)

Levin. R.I., Rubin. D.S., (2004) Statistics for Management, Pearson Education (Singapore) Pvt. Ltd. Indian Branch, Patparganj

New Delhi.

Gupta S.C. (2000) Fundamentals of Statistics, Himalaya Publishing House, New Delhi.

Elhance D.N, Elhance., Veena, Aggarwal B.M. (2000) Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, Allahabad.

Kothari.CR. (2000) Research Methodology, McGraw Hill Books Co. New Delhi.

Ferguson. G.A. (1986) Statistical Analysis in Pschology and Education, Mc Graw Hill Book Co. New Delhi.

Kaul Lokesh (2005) Methodology of Educational Research, Vikash Publishing House, New Delhi.

Kapil. H.K., (2006) Elements of Statistics Vinod Pustak Mandir Agra.

Pandey K.P., (2006) Educational Research, Vishwavidyalaya Prakashan Varanasi.

इकाई - 2 प्रतिदर्शन वितरण (Sampling Distribution)

इकाई की रूपरेखा

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप–

- प्रतिदर्शन वितरण की परिभाषा की व्याख्या करने में सक्षम हो सकेंगे।
- प्रमापित त्रुटि का अर्थ और विभिन्न प्रतिदर्शजों की प्रमापित त्रुटियों की विवेचना कर सकेंगे।
- प्रमापित त्रुटि की धारणा की उपयोगिता को बता सकेंगे।
- केन्द्रीय सीमा प्रमेय को परिभाषित कर सकेंगे।
- टी वितरण की व्याख्या कर सकेंगे।
- मुक्तांश की संकल्पना को समझ सकेंगे।
- प्रतिदर्शन वितरण के महत्व का वर्णन कर सकेंगे।

2.2 परिचय (Introduction)

व्यवहार में समग्र से केवल एक ही प्रतिदर्श लिया जाता है तथा इस प्रतिदर्श से प्राप्त विभिन्न प्रतिदर्शजों (Statistic) की सहायता

से समग्र के प्राचलों का अनुमान लगाया जाता है इसके लिए प्रतिदर्शजों का वितरण (Distribution of Statistic), जिन्हें प्रतिदर्श वितरण (Sampling Distribution) भी कहते हैं, का उपयोग किया जा है। किसी प्रतिदर्शज (statistic) का प्रतिदर्श वितरण, समग्र से एक ही आकार के अनेक यादृच्छिक प्रतिदर्शों से प्राप्त प्रतिदर्शज मानों का वितरण है। अतः यदि किसी समग्र से एक ही आकार के अनेक भिन्न–भिन्न यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया जाये तो उनमे से प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए किसी चर पर कोई वांछित प्रतिदर्शज मान (जैसे मध्यमान मध्यांक, सहसम्बन्ध) ज्ञात किये जा सकते हैं। स्पष्टतः जितने प्रतिदर्श चयनित किये जाते हैं उतनें ही प्रतिदर्शज मान प्राप्त होगें। इस प्रकार से प्राप्त प्रतिदर्शज मान परस्पर कुछ भिन्न हो सकते हैं तथा इन्हें आवृत्ति वितरण के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। प्रतिदर्शज मानों के इस वितरण को ही प्रतिदर्श वितरण (Sampling Distribution) कहते हैं।

2.3 प्रतिदर्श के मध्यमान तथा प्रतिदर्श की संख्या में सम्बन्ध (Relationship Between Sample Mean and Size of Sample)

शोधों के तहत प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त सांख्यिकी के माध्यम से केवल वर्णन ही अभीष्ट नहीं होता। इसके अतिरिक्त शोधकर्ता की दिलचस्पी समग्र से सम्बन्धित वास्तविक मान या पैरामीटर के बारे में कुशल अनुमान लगाने की हो सकती है। प्रायः प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त मान ($\overline{X}$, $\overline{\sigma}$, Md) जनसख्या के मान (μ, σ, Md) के समान नहीं होते है उनमें प्रायः अंतर रहता है परन्तु वास्तविकता यह भी है कि सम्पूर्ण जनसंख्या से हम जितने भी प्रतिदर्श लेते है उन सबके मध्यमान भी प्रायः अलग–अलग ही होते है और वे प्रायः जनसंख्या के

वास्तविक मध्यमान के सन्निकट ही रहते है परन्तु प्रायः कभी उसके समरुप (Identical) नहीं होते है इस प्रकार एक प्राचल का मान समान्यतः स्थिर रहता है जबकि प्रतिदर्शज (Statistic) के मानो में प्रायः चढ़ाव–उतार (Fluctuations) रहते है और इस सम्बन्ध में प्रायः यही आकलन (Estimate) लगाना पड़ता है कि ये मान सम्पूर्ण जनसंख्या के मान का कहाँ तक प्रतिनिधित्व (Representation) करते हैं? इस प्रश्न के उत्तर का एक आधार प्रतिदर्श की संख्या (N) होती है। दूसरा आधार प्रतिदर्श की इकाइयों का प्रतिचयन (Sampling) होता है, यदि हमारे प्रतिदर्श का आधार बड़ा है और उसकी इकाइयों का चयन यादृच्छिक संयोगिक आधार (Randomized) विधि द्वारा होता है, तब प्राप्त मध्यमान वास्तविक मध्यमान (Actual Mean) के अधिक सन्निकट होगा परन्तु यदि प्रतिदर्श आकार 30 की संख्या से कम होता है तब प्रसम्भाव्यता यही रहती है कि यह मान उस मध्यमान की अपेक्षा कम शुद्ध होगा।

सांख्यिकीय दृष्टिकोण से वास्तव में जब हमारे प्रतिदर्श की संख्या 30 या 30 से अधिक होती है तब उस वितरण को प्रसामान्य वितरण (Normal disbitution) मान लिया जाता है प्रसामान्य वितरण की स्थिति में एक शीलगुण के विषय में प्रतिदर्श का मध्यमान, जनसंख्या के मध्यमान (M_p) के प्रायः अधिक निकट रहता है, अतः बड़े न्यादर्श से प्राप्त मानों को अधिक शुद्ध तथा विश्वसनीय (More Accurate and Reliable) कह सकते हैं।

2.4 सामान्य जनसंख्या से प्रतिदर्षन (Sampling from Normal Population)

सांख्यिकीय दृष्टिकोण से जब प्रतिदर्श की संख्या ज्यादा होती है तब उस प्रतिदर्श को प्रतिनिधित्व प्रतिदर्श (Representative Sample) कहा जाता है, उस प्रतिदर्ष का वितरण प्रसामान्य वितरण

के अनुरूप होता है। उदाहरण के लिए यदि गिट्टी (पत्थर के टुकड़ों) से भरी एक ट्रक के पत्थरों का मध्यमान भार ज्ञात करना है। तो एक तरीका यह हो सकता कि सभी पत्थरों को गिना जाय और सभी का भार ले कर, भार को उनकी संख्या (N) से विभाजित कर दिया जाय और तब हमें एक पत्थर का मध्यमान भार (Mean weight) ज्ञात हो सकता है। परन्तु व्यवहारिक दृष्टि से यह कार्य जटिल एवं दुरूह है, सांख्यिकी में एक ऐसी विधि है जो काफी सरल एवं शुद्ध है, जिसकी सहायता से न तो पूरे ट्रक के पत्थरों को गिनना पड़ता है और न ही सभी पत्थरों को तौलना पड़ता है। इस विधि के अर्न्तगत हम पूरे ट्रक से तीस या तीस से अधिक ऐसे पत्थर छांट लेते है जिनका आकार या भार लगभग अन्य सभी पत्थरों से मिलता जुलता हो। यदि हम ऐसे पत्थरों के भार को उनकी संख्या (N) 30 से विभाजित कर देते हैं तो मध्यमान भार (Mean Weight) प्राप्त हो जाता है, उसे व्यवहारिक रूप से ट्रक के सभी पत्थर के सन्निकट मध्यमान भार (Approximate mean weight) की संज्ञा दी जाती है अर्थात् उसके आधार पर वास्तविक मध्यमान (True mean) अथवा प्राचल (Parameter) के विषय में पर्याप्त शुद्ध मात्रा में अनुमान (Inference) लगाये जा सकते है। यह विधि निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Inferential Statistics) कहलाती है।

अब यदि अपने प्रतिदर्श (Sample) में पत्थरों की संख्या 30 से बढ़ाकर 60 कर दी जाती है और पत्थरों का चयन इस आधार पर किया जाता है कि पत्थरों की प्रायः सभी श्रेणियों का लगभग उसी अनुपात में प्रतिनिधित्व हो जाता है जिसमें कि पत्थर ट्रक में भरे है तब उस स्थिति में जो मध्यमान भार आयेगा वह भी वास्तविक मध्यमान भार के और ज्यादा सन्निकट होगा तथा उस प्रतिदर्श का वितरण प्राचल के वितरण के समान होगा।

2.5 प्रतिदर्शन वितरण की संकल्पना (Concept of Sampling Distribution)

जब एक सम्पूर्ण समग्र में से निश्चित आकार के स्वतंत्र एवं यादृच्छिक प्रतिदर्श छांटे जाते हैं और फिर उनके पृथक–पृथक प्रतिदर्शज (माध्य, प्रमाप विचलन) ज्ञात करके उन्हें आवृत्ति वितरण के रुप में प्रस्तुत किया जाता है तो वह निदर्शन/प्रतिदर्शन वितरण कहलाता है। उदाहरण के लिए एक विश्वविद्यालय के 15,000 छात्रों में से 100–100 छात्रों के 10 न्यादर्श यादृच्छिक आधार पर चयन करके प्रत्येक न्यादर्श के माध्य ज्ञात किये जाएं तो इस प्रकार 10 माध्य प्राप्त होगें। इन 10 न्यादर्श प्रतिदर्शज माध्यों का आवृत्ति वितरण, माध्य का न्यादर्श वितरण (Sampling Distribution of Mean) कहलाएगा।

इन न्यादर्शों के प्रतिदर्शज (Statistic) में कुछ अन्तर होगा। जिसे निम्न तालिका के द्वारा प्रस्तुत किया गया है–

समग्र	प्रतिदर्श	प्रतिदर्श सांख्यिकी	समग्र सांख्यिकी	प्रतिदर्शन वितरण
15,000 विश्वविद्यालयी छात्र	100–100 छात्रों के 10 प्रतिदर्शो का पृथक समूह	प्रतिदर्श का माध्यमान($\bar{X}$) मध्यांक (Md) प्रमाप विचलन($\bar{\sigma}$) सहसम्बन्ध ($\bar{\gamma}$)	समग्र का मध्यमान(μ) मध्यांक (Md) प्रमाप–विचलन(σ) सहसम्बन्ध (γ)	माध्य का न्यादर्श वितरण मध्यांक का प्रतिदर्शन वितरण, प्रतिदर्शन का प्रमाप विचलन प्रतिदर्शन का सहसम्बन्ध

प्रतिदर्ष वितरण में यह जानना आवष्यक होता है कि प्रतिदर्ष वितरण प्रसामान्य वितरण के लगभग समान है तथा इनके निदर्षन का माध्य ($\bar{x}$) मध्यांक (Md) प्रमाप विचलन ( ) तथा सहसम्बन्ध ($\bar{\gamma}$) समग्र के माध्य (μ), मध्यांक (Md), प्रमाप विचलन (σ) तथा सहसम्बन्ध (γ) के समान है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 1. प्रतिदर्शन वितरण से आप क्या समझते हैं?

2.6 केन्द्रीय सीमा प्रमेय (Central Limit Theorem)

केन्द्रीय सीमा प्रमेय के अनुसार एक बड़े प्रतिदर्ष का यदि अनन्त समग्र से यादषच्छिक चयन किया जाए तोः–

(i) प्रतिदर्श के माध्यों का वितरण सामान्य होता है और उसमें सामान्य वितरण की सभी विशेषताएं होती है।

(ii) प्रतिदर्श माध्यों की औसत मान समष्टि के माध्य के बराबर होता है।

(iii) प्रतिदर्श माध्यों का समष्टि/समग्र माध्य के दोनों ओर वितरण का अपना मानक विचलन होता है। इस मानक विचलन को माध्य की मानक त्रुटि कहा जाता है। इसे S.E.$_M$ और $\sigma_{\bar{x}}$ से प्रदर्शित करते है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 2. केन्द्रीय सीमा प्रमेय पर टिप्पणी लिखियें।

2.7 मानक त्रुटि/प्रमाप विभ्रम का अर्थ (Meaning of Standard Error)

प्रतिदर्शन वितरण के ज्ञात होने पर समष्टि में मध्यमान के सम्बन्ध में अनुमान लगाये जा सकते हैं। अर्थपूर्णता के संदर्भ में प्रमाप विभ्रम या मानक त्रुटि का प्रयोग होता है। अतः प्रमाप विभ्रम का अर्थ है कि किसी भी प्रतिदर्शन की सांख्यिकीय माप का प्रमाप विभ्रम उस माप के निदर्शन वितरण का प्रमाप विचलन होता है।

माध्यों की मानक त्रुटि से हमें यह आभास हो जाता है कि ऐसे प्रतिदर्श माध्य की समष्टि माध्य से कितना विचलन होने की आशा हो सकती है। यदि किसी प्रतिदर्श विशेष का माध्य, समष्टि माध्य का आकलन माना जाय तो ऐसे प्रतिदर्श माध्य का समष्टि माध्य से विचलन को आनुमानिक त्रुटि कहा जाएगा। माध्य की मानक त्रुटि

यह बताती है कि किसी विशेष प्रतिचयन स्थिति में अनुमानिक त्रुटि कितनी बड़ी है।

यहाँ, σ समष्टि का मानक विचलन

n= प्रतिदर्श में प्रकरणों की संख्या

इस सूत्र में प्राचल (समष्टि के मानक विचलन) के ज्ञान की आवश्यकता होती है। जिससे माध्य की मानक त्रुटि की गणना हो सके। चूंकि σ अज्ञात है, हमें मानक त्रुटि σ का आंकलन करना होगा।

यदि वृहत् प्रतिदर्श के माध्य ($\overline{X}$) व मानक विचलन ($\overline{\sigma}$) का अभिकलन कर लिया तो $\overline{\sigma}_x$ का आकलन इस सूत्र से हो सकेगा–

$$S.E._{\cdot M} \text{ or } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$S.E._{\cdot M} \text{ or } \overline{\sigma}_x = \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{\sigma}$ = प्रतिदर्ष का मानक विचलन

n = प्रतिदर्ष में प्रकरणों की संख्या

गणितीय रीति से यह सिद्ध हो सकता है कि समग्र के माध्य और प्रतिदर्श वितरण के माध्य समान होते है। प्रमाप विचलन सामान्तर माध्य के विचलनों को मापता है। अतः निदर्शन वितरण में प्रमाप विचलन (जिसे प्रमाप विभ्रम की संज्ञा दी जाती है) सभी न्यादर्शों के समान्तर माध्यों का समग्र के समान्तर माध्य की तुलना में विचलनों को मापने का कार्य करता है। इस प्रकार प्रमाप विभ्रम समग्र के सामान्तर माध्य के अनुमान में निदर्शन विभ्रमों के माध्य का माप है।

प्रमाप विभ्रम (त्रुटि) केवल उन त्रुटियों के आकार को ही नहीं बताता है जो संयोगावश हो जाती है परन्तु उन परिशुद्धताओं को भी बताता है जो हमें प्रतिदर्श सांख्यिकी का प्रयोग करके किसी जनसंख्या के प्राचल का अनुमान करने में प्राप्त हो सकती है।

2.7.1 मानक त्रुटि (विभ्रम) का उदाहरण (Example of Standard Error)

प्रमाप विचलन (Standard Deviation) समग्र की मूल इकाईयों के समान्तर माध्य के दोनों ओर के विचलनों का माप होता है। जबकि प्रमाप विभ्रम समग्र के माप से विभिन्न प्रतिदर्श/न्यादर्श मापों की विचलनता का माप होता है। उदाहरण के लिए, 500 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के समान्तर माध्य से विचलन लिए जाए तो इन विचलनों के वर्गों का माध्य ही प्रमाप विचलन होगा। परन्तु यदि 50–50 के न्यादर्श लेकर उनके माध्य ज्ञात किए जाए और इन माध्यों का समग्र के माध्य से निकाला गया प्रमाप विचलन माध्य का प्रमाप विभ्रम $\sigma_{\bar{x}}$ (Standard Error of Mean) होगा।

माध्य का प्रमाप विभ्रम (त्रुटि) (Standard Error of Mean) ज्ञात करने का सूत्र निम्नवत् है–

$$S.E._{\cdot M} \text{ अथवा } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

यहाँ σ समग्र का मानक विचलन तथा n प्रतिदर्श का आकार है। समान्यतः समष्टि का मानक विचलन (σ) का मान ज्ञात नहीं होता है तथा सीधे–सीधे (directly) इसकी गणना करना भी सम्भव नहीं होता है। इसलिए इसके स्थान पर प्रतिदर्श के मानक विचलन का प्रयोग किया जाता है। प्रतिदर्श का आकार बड़ा होने पर (प्रायः 30 से अधिक) होने पर बिना किसी हानि के समष्टि के मानक विचलन के स्थान पर प्रतिदर्श के मानक विचलन का प्रयोग किया जाता है परन्तु प्रतिदर्श के आकार n के छोटा (प्रायः 30 से कम) होने पर प्रतिदर्श का

मानक विचलन समष्टि के मानक विचलन को कम करके आंकता है जिसके कारण प्रतिदर्श के मानक विचलन में निम्न सूत्रानुसार संशोधन करना पड़ता है। जिससे समग्र के मानक विचलन का अनाभिन्त अनुमान (Unbiased Estimate) प्राप्त हो सके।

$$\sigma = \bar{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

यहाँ $\bar{\sigma}$ = प्रतिदर्श का मानक विचलन है। समष्टि के मानक विचलन का अनुमान प्रतिदर्श प्राप्तांकों से सीधे ही निम्न सूत्र से भी लगाया जा सकता है–

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n-1} \qquad [X = (x - \bar{x})]$$

उपरोक्त विवेचन के आधार पर प्रतिदर्ष के मानक विचलन ($\bar{\sigma}$) के ज्ञात होने पर मध्यमान की मानक त्रुटि ($\sigma_{\bar{x}}$) की गणना निम्न सूत्र से की जाती है।

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \text{ (यदि } n > 30)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n-1}} \text{ (यदि } n\ 30)$$

उदाहरण– हाईस्कूल के 100 छात्रों की लम्बाई के समंकों का माध्य 30 है और मानक विचलन 5 है तो मानक त्रुटि क्या होगी?

$$S.E._M \ or\ \sigma\bar{x} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma\bar{x} = \frac{5}{\sqrt{100}}$$

हल : $= 0.50$

2.8 प्रमाप विभ्रम की धारणा की उपयोगिता (Utility of the Concept of Standard Error)

सार्थकता की जांच एवं सांख्यिकीय निगमन के अन्तर्गत प्रमाप विभ्रम की उपयोगिता निम्नलिखित कार्यों से स्पष्ट होती है।

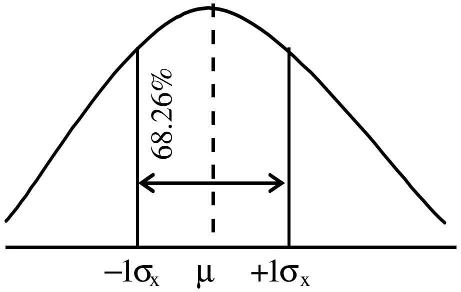
2.8.1 विश्वस्तता सीमाओं का निर्धारण (Determintion of Confidence Limits)–

निदर्शन वितरण में प्रमाप विभ्रम वही उद्देश्य पूरे करता है जो प्रसमान्य वितरण में प्रमाप विचलन द्वारा पूरे किए जाते है। दूसरे शब्दों में प्रमाप विभ्रम उन विश्वसनीय सीमाओं को निर्धारित करता है जिनके मध्य प्राचल (Parameter) या अन्य सम्बन्धित प्रतिदर्शन (Statistics) के पाये जाने की सम्भावना होती है। प्रसमान्य वितरण की कुछ प्रचलित विश्वसतता सीमाएं, उनके अन्तराल एवं स्तर को निम्न तालिका द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

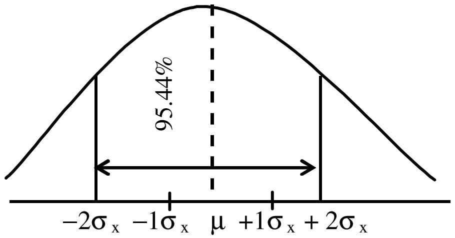
Sl. No.	Confidence Limits	Confidence Interval		Confidence Level
		Minimum	Maximum	
1.	Mean ± $1\sigma_x$	$\mu - \sigma_x$	$\mu + \sigma_x$	68.26%
2.	Mean ± $2\sigma_x$	$\mu - 2\sigma_x$	$\mu + 2\sigma_x$	95.45%
3.	Mean ± $3\sigma_x$	$\mu - 3\sigma_x$	$\mu + 3\sigma_x$	99.73%
4.	Mean ± $1.96\sigma_x$	$\mu - 1.96\sigma_x$	$\mu + 1.96\sigma_x$	95%
5.	Mean ± $2.58\sigma_x$	$\mu - 2.58\sigma_x$	$\mu + 2.58\sigma_x$	99%

उपरोक्त विश्वस्तता सीमाओं को निम्न चित्र द्वारा समझाने का प्रयास किया गया है।

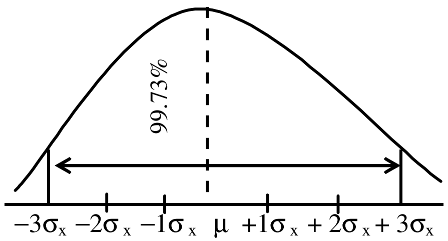
(i)



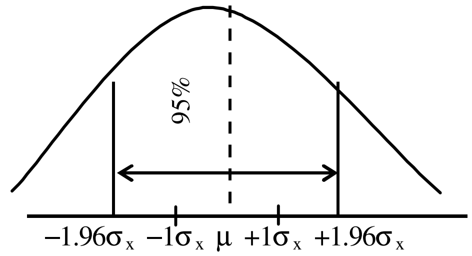
(ii)



(iii)

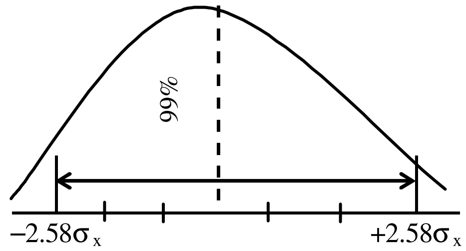


(iv)



.95 विश्वस्तता स्तर पर मध्यमान की सीमा
(Limits of Mean at .95 confidence levels)

(v)



.99 विश्वस्तता स्तर पर मध्यमान की सीमा
(Limits of Mean at .99 confidence levels)

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question): 3. प्रमापित त्रुटि के अर्थ को स्पष्ट कीजिए? प्रमापित त्रुटि की धारणा की क्या उपयोगिता है।

2.8.2 सार्थकता की जांच (Test of Significance)

सार्थकता की जांच करना प्रमाप विभ्रम का दूसरा महत्वपूर्ण कार्य है। इसी के द्वारा किसी निर्धारित शून्य परिकल्पना की जांच की जा सकती है। सार्थकता जांच हेतु अवलोकित एवं प्रत्याशित मान के अंतर को प्रमाप विभ्रम के क्रान्तिक मान (Critical Value) के संदर्भ में देखा जाता है। विभिन्न सार्थकता स्तरों के लिए अलग–अलग प्रमाप

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04
व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड

4

प्रतिदर्शन का परीक्षण (Sampling Test)

संरचनात्मक सम्पादन

डॉ0 मंजूलिका श्रीवास्तव — निदेशक, दूरस्थ शिक्षा परिषद्, नई दिल्ली

विषयगत सम्पादन

प्रो0 आर0 के0 जैन — अवकाश प्राप्त प्रोफेसर, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

लेखक

डॉ0 मनीष कुमार सिनहा — एसो0 प्रोफेसर, सी0एम0पी0 डिग्री कालेज, सम्बद्ध इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

प्रस्तुत पाठ्य सामग्री में विषय से सम्बन्धित सभी तथ्य एवं विचार मौलिक रूप से लेखक के स्वयं के हैं।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010
मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड-4 परिचय

शोध को सफलतापूर्वक सम्पादित किये जाने के लिए विभिन्न प्रकार के परीक्षण एवं विश्लेषण किये जाते हैं, जिससे कि सत्य निष्कर्ष प्राप्त हो सकें एवं सभी सम्बन्धित पक्षों के लिए उपयोगी हों।

प्रस्तुत खण्ड प्रतिदर्शन का परीक्षण (Sampling Test) इसी अनुक्रम में व्यवसायिक सांख्यिकी (Business Statistics) M.Com.-04 के पॉच खण्डों में चौथा है जो चार इकाइयों में विभक्त है।

(1) परिकल्पना एवं त्रुटियाँ (Hypothesis and Errors)

(2) बड़े तथा छोटे प्रतिदर्श (Large and Small Samples)

(3) अप्राचलिक परीक्षण (Non Parametric Tests)

(4) सह सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन (Correlation and Regression)

इकाई–1 परिकल्पना एवं त्रुटियाँ (Hypothesis and Error)

इकाई की रूपरेखा

1.1 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप–

- शून्य परिकल्पनाओं का निर्माण एवं परीक्षण की विधियों का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे।
- परिकल्पनाओं की सार्थकता का परीक्षण कर सकेंगे।
- शून्य परिकल्पनाओं के परीक्षण में त्रुटियों की पहचान कर सकेंगे।
- प्रथम प्रकार की त्रुटि की विवचेना कर सकेंगे।
- द्वितीय प्रकार की त्रुटि की विवचेना कर सकेंगे।
- निरस्तता क्षेत्र का वर्णन कर सकेंगे।
- सदिश तथा अदिश परीक्षणों की परिस्थितयां तथा विधियों का ज्ञान प्राप्त कर लेंगे।

1.2 परिचय (Introduction)

किसी भी शोध कार्य में परिकल्पना का निर्माण एवं उसका परीक्षण एक महत्वपूर्ण प्रक्रिया होती है। परिकल्पना का तात्पर्य प्रस्तावित शोध कार्य की समस्या से सम्बन्धित कथन अथवा कथनों के समूह एवं उसके सम्भावित हल से है, जिसका परीक्षण शोध की प्रक्रिया के दौरान किया जाता है। परिकल्पना मूलतः एक प्रकार की अनुमान परक मानसिक क्रिया है जिसके माध्यम से दो या दो से अधिक चरों के मध्य सम्बन्ध निरूपित किये जाते हैं। यह प्रत्याशित

परिणामों के बारे में एक अनुमान है जिसे साक्ष्यों के आधार पर प्रक्षेपित किया जाता है।

परिकल्पनाओं का सांख्यिकीय अध्ययन में महत्वूपर्ण स्थान होता है। परिकल्पना की रचना, सम्बन्धित व निश्चित आंकड़ों (Data) के संकलन में सहायक होती है। यह अध्ययन कार्य को विशिष्ट दिशा प्रदान करती हैं तथा प्रयोगों में (Experiments) स्वतंत्र चर (Idependent-Variable) के परतंत्र चर (Dependent Variable) पर प्रभाव को स्पष्ट करती है। वास्तव में, चरों के पारस्परिक सम्बन्ध की सांख्यिकीय विवेचना में प्रसम्भावता सिद्धान्त (Theory of Probability) से सहायता मिलती है। परिकल्पनाओं का परीक्षण करके उन्हें स्वीकार करना अथवा निरस्त करना ही सम्पूर्ण अनुसंधान प्रक्रिया का प्रमुख कार्य है। परिकल्पना निर्माण के उपरान्त अनुसंधान कर्ता का सारा ध्यान परिकल्पना पर केन्द्रित हो जाता है कि वह तथ्यों के आधार पर परिकल्पना को स्वीकार करेगा अथवा निरस्त करेगा। यही कारण है कि किसी भी अनुसंधान में, परिकल्पनाओं के परीक्षण को सर्वाधिक महत्वपूर्ण माना जाता है। परिकल्पनाओं का परीक्षण शोधकर्ता के द्वारा प्रतिदर्शों से संकलित किये गये समंकों का विश्लेषण करके किया जाता है। परन्तु अनुसंधान–परिकल्पनाओं का परीक्षण सीधे–सीधे (Straight Forward) ढंग से नहीं किया जाता है। परिकल्पनाएं समष्टियों की विशेषताओं से सम्बन्धित होती है, तथा अनुसंधानकर्ता के पास केवल प्रतिदर्शो से प्राप्त सूचनाएं उपलब्ध होती है। इसलिए परिकल्पनाओं के सम्बन्ध में लिया गया निर्णय सदैव ही प्रायिकता पर आधारित निर्णय होता है। अतः परिकल्पना परीक्षण के दौरान परिकल्पना के सत्य होने की प्रायिकता अधिक होती है, तब परिकल्पना को स्वीकार करते हैं तथा प्रायिकता कम होने पर परिकल्पना को निरस्त कर दिया जाता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question) 1. वैज्ञानिक शोधकार्यों में परिकल्पनाओं के महत्व का वर्णन कीजिए ?

1.3 शून्य परिकल्पना का निर्माण (Formulation of Null Hypothesis)

शून्य परिकल्पना एक सांख्यिकीय परिकल्पना (Statistical Hypothesis) है जिसके द्वारा विभिन्न प्रतिदर्शों में पाये जाने वाले अन्तर की सार्थकता की जांच की जाती है। शून्य परिकल्पना को Ho संकेताक्षर से अभिव्यक्त किया जाता है। शून्य परिकल्पना दो या दो से अधिक समष्टियों के मध्यमानों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करने के लिए बनायी जाती है। शून्य परिकल्पना से तात्पर्य यह है कि हम कल्पना करते हैं कि प्राचल एवं प्रतिदर्शज में अन्तर शून्य हैं और प्रतिदर्शो से प्राप्त मध्यमानों में अवलोकित अन्तर (Observed Difference) संयोगवश हुई प्रतिचयन त्रुटि (Chance Sampling Error) के कारण प्राप्त हुआ है। दूसरे शब्दों में शून्य परिकल्पना में यह कहा जा सकता है कि ''दो समष्टियों के मध्यमानों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है।'' उदाहरण के लिए यह मानकर चलना कि सफलता के लिए विद्यार्थियों का नियमित अध्ययन लाभदायक है, इसके लिए शून्य परिकल्पना होगी,

''नियमित अध्ययन करने वाले छात्रों तथा नियमित अध्ययन न करने वाले छात्रों की सफलता में कोई सार्थक अन्तर नहीं होता है।''

शून्य कल्पना का आधार इसी में हैं कि उसका विलोम विपरीत स्वीकारात्मक स्थिति को प्रमाणित करता है। संकेताक्षरों के रूप में इस शून्य परिकल्पना को निम्न ढंग से लिखा जा सकता हैः–

$$Ho : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$Ho : \mu_1 = \mu_2$

यहां पर μ_1 तथा μ_2 क्रमशः प्रथम समष्टि व द्वितीय समष्टि के लिए मध्यमान हैं। इस शून्य परिकल्पना के लिए वैकल्पिक परिकल्पना निम्न में से कोई एक होगी–

$H1 : \mu_1 \neq \mu_2$

अथवा $H1 : \mu_1 > \mu_2$

अथवा $H1 : \mu_1 < \mu_2$

इसी प्रकार से दो से अधिक समष्टियों के मध्यमानो की तुलना के समय शून्य परिकल्पना होगी "विभिन्न समष्टियों के मध्यमानों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है", तब इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$Ho : \mu_1 - \mu_2 = \mu_1 - \mu_3 = \mu_2 - \mu_4 = 0$ ....Null Hypothesis

अथवा $Ho : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

इस शून्य परिकल्पना के लिए वैकल्पिक परिकल्पना निम्नवत् होगी–

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

शून्य परिकल्पना के निर्माण के बाद शून्य परिकल्पना का परीक्षण किया जाता है, इसमें देखा जाता है कि प्रतिदर्शों के मध्यमानों बीच अन्तर सार्थक है अथवा संयोगवश हुआ है और संयोग की प्रायिकता क्या है? यदि अन्तर की प्रायिकता कम होती है तब प्राप्त अन्तर का संयोगवश होना तो सम्भव हो सकता है परन्तु अन्तर अप्रायिक (un-probable) होने के कारण शून्य परिकल्पना को निरस्त कर दिया जाता है। और वैकल्पिक परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है। अतः शून्य परिकल्पना वैकल्पिक परिकल्पना (Alternate

Hypothessis) का विलोम होती है अर्थात् शून्य परिकल्पना को स्वीकृत होने पर वैकल्पिक परिकल्पना या अनुसंधान परिकल्पना को अस्वीकृत कर दिया जाता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question) 2. शून्य परिकल्पनाओं का निर्माण क्यों किया जाता है ?

1.4 परिकल्पनाओं का परीक्षण (Testing of Hypothesis)

सम्बन्धित आंकड़ों के आधार पर यथार्थ अनुमान (Exact Inference) लगाने के लिए शून्य परिकल्पना का प्रयोग किया जाता है। सांख्यिकी के क्षेत्र में विभिन्न उद्देश्यों तथा स्थितियों के अनुरूप अनेक परीक्षण उपलब्ध है जिनका प्रयोग शून्य परिकल्पनाओं के परीक्षण हेतु किया जाता है। शून्य परिकल्पनाओं के परीक्षण हेतु प्रमुख परिस्थितियां निम्नवत हैं:–

(i) किसी प्रतिदर्श वितरण की सैद्धान्तिक वितरण से तुलना करने हेतु (To Compare a Sample Distribution with some theoretical distribution)

उदाहरण–सी0आर0 परीक्षण, टी–परीक्षण, द्विपदीय परीक्षण तथा काई वर्ग परीक्षण।

(ii) दो स्वतंत्र प्रतिदर्शों की तुलना करने हेतु (To Compare Two Independent Samples)

उदाहरण–सी0आर0 परीक्षण, टी–परीक्षण, काई वर्ग परीक्षण, मध्यांक परीक्षण आदि।

(iii) दो सम्बन्धित प्रतिदर्शों की तुलना करने हेतु (To Compare Two Related Samples)

उदाहरण–सी0आर0 परीक्षण, टी–परीक्षण, चिन्ह परीक्षण, तथा

विल्कोक्सन परीक्षण।

(iv) दो से अधिक स्वतंत्र प्रतिदर्शों की तुलना हेतु (To Compare More Than Two Independent Samples)

उदाहरण–प्रसरण विश्लेषण, सह प्रसरण विश्लेषण, काई वर्ग परीक्षण, विस्तारित मध्यांक परीक्षण आदि।

(v) दो से अधिक सम्बन्धित प्रतिदर्शों की तुलना हेतु (To Compare More Than Two Related Samples)

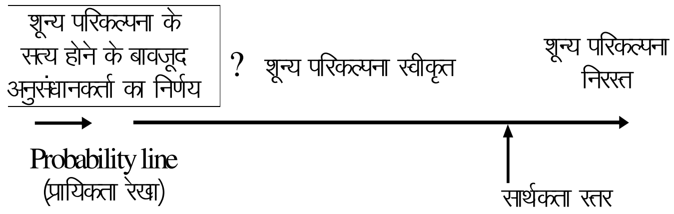
उदाहरण– प्रसरण विश्लेषण, सह प्रसरण विश्लेषण, क्यू परीक्षण आदि।

इन विभिन्न परिस्थियों में प्रतिदर्शजों के परीक्षण मान के संयोगवश हुई प्रतिचयन त्रुटि (chance sampling error) के कारण प्राप्त होने अथवा प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता के आधार पर शून्य परिकल्पना को स्वीकार अथवा निरस्त किया जाता है, अर्थात शून्य परिकल्पना के माध्यम से यह ज्ञात किया जाता है कि स्वतंत्र चर (Independent variable) के प्रभाव के कारण परतंत्र चर (Dependent variable) की मात्रा पर क्या कोई सार्थक अन्तर (Signification difference) देखने मे आता है? गैरेट के शब्दों में ''वह अन्तर सार्थक कहलाता है, जिसके सम्बन्ध में अत्यधिक प्रसम्भाव्यता इस तथ्य की हो कि उसके घटित होने का कारण संयोग नहीं है अथवा वह किसी क्षणिक कारण व घटना चक्र पर आधारित नही है बल्कि जिसके कारण एक समष्टि के दो प्रतिदर्शों में वास्तविक अन्तर देखने में आता हो।''

(A difference is called significant when the probability is high that it cannot be attributed to chance (i.e. temporary or accidental factors) and hence it represents a true difference

between population mean)

इसके विपरीत, जब यह कहा जाय कि समष्टि अथवा प्रतिदर्श के दोनों मध्यमानों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है तथा जो अन्तर प्राप्त हुआ है वह न्यादर्श की त्रुटि के कारण हैं इस कथन को शून्य परिकल्पना कहते हैं। इसकी पुष्टि हेतु परीक्षण किया जाता हैं, और अन्तर (दो मध्यमानों) की सार्थकता के स्तर की जांच की जाती है। अतः सार्थकता के स्तर प्रायिकता रेखा पर स्थित वे बिन्दु हैं, जो शून्य परिकल्पना के सम्बन्ध में लिए जाने वाले निर्णयों को दो वर्गों स्वीकृत तथा अस्वीकृत में विभेद करते है।



अनेक शोध कार्यों में विभिन्न सार्थकता स्तरों का प्रयोग किया जाता है, इसमें .05 व .01 के दो सार्थकता स्तरों का प्रयोग बहुतायत से होता है। जब .05 सार्थकता स्तर पर शून्य परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है। तब इसका अर्थ कि 100 में से केवल 5 अवसर ऐसे हो सकते हैं जबकि शून्य परिकल्पना के सत्य होने पर भी उसे अस्वीकार कर दिया जाय अर्थात 95 प्रतिशत हम विश्वास से कह सकते है कि दोनो मध्यमानों सार्थक (Significant difference) अन्तर है। इसी प्रकार से .01 स्तर पर शून्य परिकल्पना को अस्वीकार करने का तात्पर्य है कि 100 में से केवल एक ही अवसर ऐसा हो सकता है जबकि शून्य परिकल्पना के सत्य होने पर भी उसे निरस्त कर दिया जाय अर्थात 99 प्रतिशत हम विश्वास से कह सकते हैं कि दोनों मध्यमानों में सार्थक अन्तर है।

उक्त विवेचना के आधार पर कहा जा सकता है कि शून्य परिकल्पना को स्वीकार अथवा निरस्त करने में सार्थकता स्तर महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं। कुछ सांख्यिकीविद् .05 तथा .01 के सार्थकता स्तर के अतिरिक्त .02, .03, .04, .06, .09, .10, या .15 आदि सार्थकता स्तरों के प्रयोग को उचित मानते है इसके पीछे उनका तर्क है कि अनुसंधानकर्ता अपनी इच्छानुसार सार्थकता स्तर का चयन इस ढंग से करेगा कि परिकल्पनाओं की पुष्टि हो सके।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question) 3. परिकल्पनाओं के परीक्षण से आप क्या समझते है? शून्य परिकल्पना को स्वीकार अथवा अस्वीकार किन परिस्थितियों में किया जाता है?

1.5 शून्य परिकल्पना के परीक्षण में त्रुटियां (Errors in the Testing of Null Hypothesis)

जैसा कि हमने देखा कि किसी पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर पर ही शून्य परिकल्पना स्वीकृत अथवा अस्वीकृत की जाती है। किसी भी शून्य परिकल्पना का यथार्थ परीक्षण सम्भव नहीं है। इसलिए शून्य परिकल्पना के सम्बन्ध में लिया गया निर्णय प्रायिकता (Probabity) पर आधारित होता है। जैसे .05 सार्थकता स्तर पर शून्य परिकल्पना निरस्त की जाती है तब इस निर्णय के गलत होने की 5 प्रतिशत प्रायिकता होगी अर्थात शून्य परिकल्पना के सम्बन्ध में लिये गये निर्णय में त्रुटि हो सकती है। यह त्रुटि दो प्रकार की हो सकती हैः–

प्रथमः शून्य परिकल्पना के वास्तव में सत्य होने पर भी उसे त्रुटिवश निरस्त कर दिया जाये।

द्वितीयः शून्य परिकल्पना के गलत होने पर भी उसे त्रुटिवश स्वीकार कर लिया जाए।

सत्य, शून्य परिकल्पना को निरस्त करने पर होने वाली त्रुटि को प्रथम प्रकार की त्रुटि (The Type 1 Error) कहते है। प्रथम प्रकार की त्रुटि का सम्बन्ध सार्थकता स्तर से होता है। सार्थकता स्तर प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता को इंगित करता है। इस प्रकार की त्रुटि होने की प्रायिकता को अल्फा (α Alpha) संकेताक्षर से अभिव्यक्त करते है दूसरे शब्दों में शून्य परिकल्पना को त्रुटिवश निरस्त करने की प्रायिकता को α त्रुटि कहते हैं। सार्थकता स्तर जितना बड़ा होता है प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता भी उतनी ज्यादा होती है। जैसे उदाहरण में .05 स्तर पर शून्य परिकल्पना को निरस्त कर दिया जाता है तब केवल 5% प्रायिकता इस बात की हो सकती है कि शून्य परिकल्पना (विज्ञान शिक्षण में प्रदर्शन विधि एवं प्रवचन विधि में कोई सार्थक अन्तर नहीं है) सत्य हो अर्थात् अवलोकित अन्तर केवल संयोगवश ही आ रहा हो। इसलिए .05 सार्थकता स्तर पर अधिकतम α त्रुटि होने की प्रायिकता .05 अथवा 5% होती है। इसी प्रकार .01 के सार्थकता स्तर पर अधिकतम α त्रुटि होने की प्रायिकता .01 अर्थात् 1% होती है।

शून्य परिकल्पना को स्वीकार करने की स्थिति में होने वाली त्रुटि को द्वितीय प्रकार की त्रुटि (The type II Error) कहते है। तथा इसके होने की प्रायिकता को बीटा संकेताक्षार (β–Beta) से प्रकट करते हैं। शून्य परिकल्पना को त्रुटिवश स्वीकार करने की प्रायिकता को β त्रुटि कहते हैं। इसमें भी सार्थकता स्तर जितना बड़ा होता है द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता भी उतनी कम होती है।

	प0 (Ho)	**प1** (H_1)
परि.1 स्वीकृत (Accept H_1)	Type I प्रथम प्रकार (α)	सही Correct
परि0 स्वीकृत (Accept Ho)	Correct	द्वितीय प्रकार (Type-II) (β)

शून्य परिकल्पना को त्रुटिवश निरस्त करने की प्रायिकता

शून्य परिकल्पना को त्रुटिवश स्वीकृत करने की प्रायिकता

शून्य परिकल्पना के परीक्षण में होने वाली दोनों प्रकार की त्रुटियां एक दूसरे से विलोम रूप से सम्बन्धित होती है।किसी प्रतिदर्श के आकार (n)पर एक प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता को कम करने पर दूसरे प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता बढ़ जाती है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question) 4. शून्य परिकल्पना के परीक्षण में होनें वाली त्रुटियों का वर्णन कीजिए ?

स्वमूल्यांकन प्रश्न (Self Assessment Question) 5. प्रथम प्रकार की त्रुटि तथा द्वितीय प्रकार की त्रुटि में क्या अन्तर है ?

1.6 निरस्तता क्षेत्र (Area of Rejection)

प्रतिदर्श वितरण (Sampling distribution) में सांख्यिकीय परीक्षण के वे सभी मान होते हैं जो शून्य परिकल्पना के सत्य होने पर संयोगवश (By Chance) प्राप्त हो सकते हैं। प्रतिदर्श वितरण के उस भाग को, जिसमें परीक्षण मान को सार्थक माना जाता है तथा शून्य परिकल्पना निरस्त कर दी जाती है, निरस्तता क्षेत्र (Area of Rejection) कहते हैं। अर्थात् सार्थकता स्तर के अनुरूप प्रतिदर्श वितरण को दो भागों में बांटा जा सकता है, एक भाग में वे मान होते हैं, जिनके संयोगवश आने की प्रायिकता सार्थकता स्तर से जुड़ी प्रायिकता (α) से कम होती है जबकि दूसरे भाग में वे मान होते हैं जिनके संयोगवश आने की प्रायिकता ($1-\alpha$) के बराबर होती है क्योंकि प्रथम भाग में परीक्षण मान के स्थित होने पर शून्य परिकल्पना निरस्त कर दी जाती है इसलिये उसे निरस्तता क्षेत्र (Area of Rejection या Region of Rejection) कहते हैं । जबकि दूसरे भाग में परीक्षण मान के स्थित होने पर शून्य परिकल्पना स्वीकार कर लेते हैं इसलिए इसे स्वीकृती क्षेत्र (Area of Acceptance or Region of Acceptance) कहा जाता है।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04

व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड

5

सूचकांक एवं गुण नियन्त्रण (भाग- 1)

(Index Numbers and Quality Control)

परामर्श-समिति

प्रो0 नागेश्वर राव	**कुलपति - अध्यक्ष**
डॉ0 हरीशचन्द्र जायसवाल	वरिष्ठ परामर्शदाता - कार्यक्रम संयोजक
श्री एम0 एल0 कनौजिया	कुलसचिव - सचिव

संरचनात्मक सम्पादन

डॉ0 मंजूलिका श्रीवास्तव	निदेशक, दूरस्थ शिक्षा परिषद्, नई दिल्ली

विषयगत सम्पादन

प्रो0 मूल मोतिहार	प्रोफेसर मोनिरबा, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

लेखक

डॉ0 मनीष कुमार सिन्हा	सी0 एम0 पी0 डिग्री कालेज, सम्बद्ध इलाहाबाद विश्वविद्यालय इलाहाबाद

प्रस्तुत पाठ्य सामग्री में विषय से सम्बन्धित सभी तथ्य एवं विचार मौलिक रूप से लेखक के स्वयं के हैं।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010

मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड-5 परिचय

आर्थिक जगत में होने वाले उच्चावचनों का प्रभाव सदैव मूल्यों द्वारा परिलक्षित होता है। उत्पादक उपभोक्ता एवं सरकार सदैव इस विशय में सजग रहते हैं। आर्थिक नीतियों के निरूपण में मूल्य ही आधार में रहते हैं।

इस प्रकार से उत्पादक एवं उपभोक्ता वस्तुओं के मूल्य एवं गुणवत्ता के विशय में सजग रहते है। उपभोक्ता मूल्य के बदले उत्कष्ट गुणवत्ता वाली वस्तुएँ चाहता है। विक्रेता भी प्रतिस्पर्धा में तभी ठहर सकता है ज बवह उत्तम गुणवत्ता वाली वस्तुएं उत्पादित करें।

प्रस्तुत खण्ड सूचकांक एवं गुण नियन्त्रण (Index numbers and Quality Control),व्यवसायिक साख्यिकी (Business Statistics) M.Com.04 का पॉचवां खण्ड है जो चार इकाइयों में विभक्त है –

1) सूचकांक (Index Numbers)

2) भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)

3) सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण (Statistical Quality Control)

4) नियन्त्रण चार्ट की संरचना (Construction of Control Charts)

इकाई–1 सूचकांक (INDEX NUMBERS)

इकाई की रूपरेखा

1.4.5 संकुचन के माध्यम से वास्तविक आय का अनुमान
(Estimation of Real Income Through Deflation)

1.4.6 मजदूरी वेतन भत्ता निर्धारण में सहायक
(Helpful in Fixation of Wages Salaries and Allowances)

1.4.7 अन्य राष्ट्रों से तुलना
(Comparision with Other Nations)

1.5. सूचकांकों का महत्त्व (Importance of Index Numbers)

1.6. सूचकांकों की संरचना (Construction of Index Numbers)

1.6.1. सूचकांकों का विशेष का उद्देश्य
(Specific Purpose of Index Numbers)

1.6.2. वस्तुओं का चुनाव
(Selection of Commodities or Items)

1.6.2.1 वस्तु का प्रतिनिधिक होना
(Items should be of representative character)

1.6.2.2 वस्तुओं को समान एवं प्रमाणित होना चाहिए
(Items should be similar, identical and standardized)

1.6.2.3 वस्तुओं को लोक प्रिय होना चाहिए
(Items should be popular)

1.6.2.4 वास्तविक वस्तुओं को सम्मिलित करना चाहिए
(Real items should be included)

1.6.2.5 वस्तुओं की संख्या
(Number of items)

1.6.3. वस्तुओं का वर्गीकरण (Classification of Commodities)

1.6.4. मूल्यों का चुनाव (Selection of Prices)

1.6.4.1 थोक अथवा फुटकर मूल्य
(Wholesale/retail prices)

1.6.4.2 मूल्यों की प्राप्ति के केन्द्र
(Centers for procurement of prices)

1.6.4.3 मूल्य प्राप्ति के साधन
(Means of Procure meant of prices)

1.6.4.4 मूल्य प्राप्ति की बारम्बारता
(Frequency of procurement of prices)

1.6.4.5. मूल्यों को अभिव्यक्त करने का आधार
(Basis for Expression of Prices)

1.6.5. आधार वर्श का चुनाव (Selection of Base Year)

1.6.5.1. स्थिर आधार विधि
(Fixed Base Method)

1.6.5.2. श्रृंखला आधार विधि
(Chain Base Method)

1.6.5.3. आधार में परिवर्तन
(Base Conversion)

1.6.5.3.1. स्थिर आधार से श्रृंखला आधार में परिवर्तन
(Conversion to Chain base from Fixed Base)

1.6.5.3.2. श्रंखला आधार से स्थिर आधार में परिवर्तन
(Conversion to Fixed Base from Chain base)

1.6.6. माध्य का चुनाव (Selection of Average)

1.6.6.1. समान्तर माध्य
(Arithmetic Average)

1.6.6.2. मध्यिका
(Median)

1.6.6.3. गुणोत्तर माध्य
(Geometric Mean)

1.7. सूचकांकों का वर्गीकरण (Classification of Index Numbers)

1.7.1. मूल्य (कीमत) सूचकांक
(Price Index Numbers)

1.7.2. मत्रा सूचंकाक
(Quantity Index Numbers)

1.7.3. कुलमूल्य सूचंकाक
(Value Index Numbers)

1.8. सूचकाकों संरचना करने की विधिया

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन करने के पश्चात् आप–

- सूचकांकों के विषय में समग्र ज्ञान प्राप्त करेंगे,
- सूचकांक की अवधारणा एवं संरचना के उद्देश्य से परिचित होंगे,
- सूचकांकों के प्रकार का ज्ञान प्राप्त करेंगे,
- सूचकांकों के माध्यम से आर्थिक गतिविधि के विभिन्न पहलुओं का विशलेषण कर सकेंगे,
- सूचकांकों की सीमाओं से परिचित हो सकेंगे।

1.1 परिचय (Introduction)

हम जानते हैं कि आर्थिक गतिविधियाँ सदैव उच्चावचन के पर्याय के रूप में प्रकट होती रहती हैं। अर्थशास्त्री, निवेशक, उद्योगपति

एवं उपभोक्ता सदैव वस्तुओं के, सामग्रियों के, खाद्यान्नों के, शेयरों के एवं बहुमूल्य धातुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन एवं उनके सम्भावित प्रभाव का अध्ययन करने में व्यस्त रहते हैं। आर्थिक जगत में अनेक परिवर्तन होते रहते हैं एवं इन परिवर्तनों की गति बहुत द्रुत होती है। इनसे सम्बन्धित मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का मापन निश्चित समयान्तराल पर होना आवश्यक होता है। इन उच्चावचनों का स्वतंत्र रूप से मापन कठिन होता है, पर, तुलनात्मक रुप से इनकी गणना की जा सकती है। समय–समय पर ऐसी चर्चा होती है कि मूल्यों में निरन्तर वृद्धि होती जा रही है, कृषि एवं औद्योगिक उत्पादन में उत्तरोत्तर वृद्धि हो रही है, शेयरों के मूल्यों में उच्चावचन अत्यन्त द्रूत गति से हो रहें हैं आदि–आदि। यह मूल्य, कृषि उत्पाद, औद्योगिक उत्पाद एवं शेयरों के मूल्य इत्यादि ऐसे तथ्य हैं जिनका प्रत्यक्ष मापन सम्भव नहीं है। इनका अप्रत्यक्ष एवं सापेक्ष रूप में ही मापन सम्भव हैं।

उदाहरण के लिये यदि देश में चावल की किसी एक श्रेणी का मूल्य सन 2005 में 2500 रु0 प्रति क्विण्टल था तथा सन् 2008 में उसी श्रेणी के चावल का मूल्य 2800 रु0 प्रति क्विण्टल हो गया तो सन् 2005 की तुलना में सन् 2008 में चावल के मूल्य में 12 प्रतिशत की वृद्धि हुई। हम, इस प्रकार से प्राप्त तुलनात्मक प्रतिशतों को ही सूचकांक कहतें हैं। सूचकाकों को निर्देशांक तथा (Index Numbers) के रूप में भी जाना जाता है।

आप, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index) थोक मूल्य सूचकांक, (Wholesale Price Index), स्टाक एक्सचेंज का सवेदी सूचंकाक (Sensitive Index of Stock Exchanges) आदि से भलीभांति परिचित होगें। यह सभी सूचकांक आर्थिक क्षेत्र की विभिन्न गतिविधियों में प्रयोग किये जाते हैं।

1.2 सूचकांकों का अर्थ एवं अवधारणा (Meaning and Concept of Index Numbers)

आप जानते है कि किसी भी राष्ट्र की अर्थव्यवस्था के विभिन्न आयाम होते हैं, जैसे कृषि, उद्योग, अर्थ, व्यापार एवं सेवाएं आदि।

यदि उनमें से किसी एक क्षेत्र, जैसे कि उद्योग को ही लें। किसी एक वर्ष में उद्योगों की स्थित के बारे में यदि यह निष्कर्ष आए कि उस वर्ष औद्योगिक उत्पादन में 5 प्रतिशत की सामान्य वृद्धि देखी गई, तो यह एक समग्र स्तर की बात हुई। इसका आशय यह नहीं है कि उद्योगों के सभी घटकों का उत्पादन 5 प्रतिशत की दर से बढ़ा। कुछ वस्तुओं का उत्पादन घटा होगा तो कुछ वस्तुओं का बढ़ा होगा। एक और ध्यान देने योग्य बात है कि इन सभी वस्तुओं का मापन भी अलग–अलग इकाईयों में व्यक्त किया जाता है, जैसे टन, किलोग्राम, मीटर, दर्जन, प्रतिइकाई इत्यादि। ऐसी स्थित में यदि औद्योगिक उत्पादन के परिवर्तन अथवा मूल्य स्तर के परिवर्तनों के आकड़ों की तुलना किसी समयान्तराल से अथवा किसी भौगोलिक क्षेत्र से करना हो तो आप समझ ही गए होंगे कि यहां पर सामान्य प्रकार के माध्यों का प्रयोग नहीं हो सकता है। क्योंकि विभिन्न आकड़े विभिन्न मापनों द्वारा व्यक्त किये जाते है। ऐसी स्थित में सूचकांकों का प्रयोग किया जाता है जो कि विशिष्ट प्रकार के माध्य होते हैं। सूचकाकों को आर्थिक वैरोमीटर (दाबमापी) भी कहा जाता है। विभिन्न अर्थशास्त्रीयों द्वारा भी सूचकांकों को इसी परिप्रेक्ष्य में परिभाषित किया गया है। क्राक्सटन एवं काउडेन के द्वारा इन्हें आर्थिक चरों के परिमाण में होने वाले अंतर के मापन के माध्यम के रूप में परिभाषित किया गया है। ए0एल0 बाउले ने सूचकांकों को एक ऐसी समंक माला के रूप में परिभाषित किया है जो अपने झुकाव एवं उच्चावचनों के द्वारा संबंधित परिमाण के परिवर्तन को प्रदर्शित करती है। अब आपको स्पष्ट हो गया होगा कि सूचकांकों के द्वारा ऐसे परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है जो प्रत्यक्ष रूप से तुलनीय नहीं होते हैं। संक्षेप में हम कह सकते हैं कि सूचकांक एक ऐसे क्रमवार संख्यात्मक श्रेणी होते हैं जिनके द्वारा पर समय–समय समयान्तराल दैनिक, साप्ताहिक, मासिक अथवा वार्षिक हो सकता है) आर्थिक घटनाक्रम का मापन किया जाता है। उदाहरण के लिये यह कहा जाए कि सन् 2009 में थोक मूल्य सूचकांक 285 था, जबकि तुलनात्मक रूप से सन् 1999 में यह

100 था। इसके द्वारा हमें इन दो समयान्तराल में थोक मूल्यों के स्तर में हुए परिवर्तन की प्रकृति का आभास हो जाता है। जब किसी एक वस्तु के स्तर पर परिवर्तन का अध्ययन करते हैं तो उसे एकचरीय सूचकांक कहते हैं तथा जब बहुत सी वस्तुओं के परिवर्तन का एक साथ अध्ययन करते हैं तो उसे संयुक्त अथवा सम्मिलित सूचकांक कहते हैं।

1.3 सूचकांकों की विशेषताएँ (Features of Index Numbers)

अब तक हमने जो अध्ययन किया है उसके आधार पर सूचकांकों की विशेषताओं को निम्न रूप से व्यक्त कर सकते हैं।

1.3.1 संख्यात्मक मापन (Numerical Measure)

सूचकांक सदैव सख्यात्मक रूप में व्यक्त किये जाते हैं; जैसे कि सन् 2009 में मूल्य सूचकांक 285 था, सन् 1999 के मूल्य सूचकांक 100 की तुलना में। शब्दों के द्वारा किसी किसी भी परिवर्तन की व्याख्या की जा सकती है, पर शब्दों की व्याख्या कोई दिशा निर्देशन नहीं करती हैं। परन्तु सूचकांकों के द्वारा परिभाषित परिवर्तन का संख्यात्मक स्वरूप एक दिशा प्रदान करके निश्चित निष्कर्ष प्रस्तुत करता है। उदाहरण के लिये स्टाक एक्स्वेज द्वारा प्रकाशित सवेदी सूचकांक निवेशकों को निश्चित दिशा प्रदान करता है।

1.3.2 सापेक्ष मापन (Relative Measure)

सूचकांकों की एक और विशेषता है कि इनके द्वारा सापेक्ष अथवा तुलनात्मक मापन प्रस्तुत किया जाता है। निरपेक्ष रुप से अथवा स्वतंत्र रूप से परिवर्तन का मापन सम्भव नहीं हैं। निरपेक्ष मापन तुलना के योग्य नहीं होता है। सापेक्ष मापन के द्वारा ही तुलना सम्भव है और उसी के आधार पर निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है। तुलना, समय के आधार पर, अथवा स्थान के आधार पर की जाती है।

1.3.3 प्रतिशतों का माध्य (Average of Percentages)

सूचकांक परिवर्तनों को औसत के रूप में व्यक्त करता हैं, पर

यह औसत सामान्य औसत, जैसे कि समान्तर माध्य या मध्यिका, नहीं होते हैं। सामान्य औसत के माप–समान्तर माध्य अथवा मध्यिका, अथवा गुणोत्तर माध्यों की एक सीमा होती है, वह यह कि इनके द्वारा केवल ऐसी श्रेणियों की तुलना की जा सकती है जो समरूपी प्रकृति की हों। अर्थात् एक ही प्रकार की इकाई में व्यक्त की गई हों। जब श्रेणियाँ भिन्न–भिन्न इकाईयों में व्यक्त की गई हों अथवा श्रेणियाँ विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का समावेश करती हो तो, औसत के सामान्य मापों द्वारा उनका तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता है। सूचकांकों के द्वारा इस कठिनाई को दूर कर लिया जाता है। सूचकांक परिवर्तनों को औसत के रूप में तो व्यक्त करता है परन्तु उन औसतों को प्रतिशतों के माध्यम से ज्ञात किया जाता है। आधार वर्ष (जिससे तुलना करनी है) तथा वर्तमान वर्ष (जिसकी तुलना करनी है) के संदर्भ में मूल्यानुपातों का प्रतिशत निकाला जाता है। दूसरों शब्दों में आधार मूल्य अथवा प्रमाणिक मूल्य को 100 मान कर प्रचलित मूल्यों का परिवर्तन प्रतिशत में ज्ञात किया जाता है। सूचकांक इन्हीं मूल्यानुपातों के प्रतिशत का ही विशिष्ट माध्य होता है।

1.3.4 तुलना का आधार (Basis for Comparison)

चरों के मध्य तुलना का आधार या तो समय होता है या स्थान। सूचकांकों की विशेषता यह होती है कि इनके द्वारा किसी स्थान या समय को आधार मान कर उसकी तुलना किसी वांछित समय या स्थान से की जाती है। जब समय को तुलना का आधार मान जाता है तब किसी विशेष वर्ष, माह, सप्ताह अथवा दिन को आध ाार के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इसी प्रकार से, स्थान, जब तुलना का आधार होता है तब किसी स्थान विशेष अथवा किसी विशेष भूभाग को आधार के रूप में स्वीकार करके परिवर्तन की मात्रा का मापन करते हैं।

1.3.5 व्यापक उपयोगिता (Wider Utility)

सूचकांकों की उपयोगिता एवं प्रयोग का क्षेत्र केवल उत्पादन

एवं मूल्यों के परिवर्तन के मापन तक ही सीमित नहीं समझना चाहिए, आपको अब तक के अध्ययन से यह अवश्य ही स्पष्ट हो चुका होगा। आयत–निर्यात, सरकारी नीति, स्टाक एक्सचेंज के सट्टे अथवा अनुमान, मूल्य निर्धारण एवं उपभोग के अध्ययनों में सूचकांकों का व्यापक प्रयोग किया जाता है।

1.3.6 आर्थिक स्पन्दन का मापन (Measure of Economic Vibrations)

पूर्ववर्ती पंक्तियों के अध्यनोपरान्त एक तथ्य यह सामने आता है कि सूचकांकों का प्रयोग व्यापक रूप से आर्थिक क्रिया–कलापों के मापन एवं उनसे प्राप्त परिणामों के विश्लेषण में किया जाता है। अर्थव्यवस्था के विभिन्न आयामों में इनके प्रयोग के चलते यह कहा जाता है कि सूचंकाक देश के आर्थिक स्पन्दन के मापन का एक विशेष उपकरण होते हैं, जैसे एक चिकित्सक के लिये ''परिश्रावक'' (Stethoscope), जिसकी सहायता से रूग्ण व्यक्ति के रोग की पहचान कर ली जाती है। इसी विशेषता के आधार पर सूचकांकों को आर्थिक दाबमापी (Economic barometer) कहा जाता है।

1.4 सूचकांकों की उपयोगिता (Utility of Index Numbers)

1.4.1 प्रवृत्तियों का सहज मापन (Simple Measure of Trends)

विभिन्न समयान्तराल के तथ्यों की विभिन्न श्रेणीयों की प्रवृत्तियों का अध्ययन सूचकांकों की सहायता से सहजतापूर्वक किया जा सकता है। प्रवृत्तियों के अध्ययन से केवल वर्तमान का ही नहीं वरन् भविष्य की सम्भावित प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान सहजता एवं शुद्धता पूर्वक किया जा सकता है। उदाहरण के लिये सूचनकांकों के माध्यम से विदेशी व्यापार के अन्तर्गत आयात–निर्यात एवं भुगतान संतुलन की भूतकाल एवं वर्तमान स्थित का अध्ययन किया जा सकता है एवं इसके आधार पर भविष्य की प्रवृत्तियों का अनुमान लगाया जा सकता है।

1.4.2 आर्थिक नीतियों का निरुपण (Policy form mutation)

हम जानते हैं कि सूचकांकों की सहायता से विभिन्न आर्थिक गतिविधियों की प्रवृत्ति का अध्ययन किया जाता है एवं भविष्य की सम्भावित प्रवृत्तियों का आकलन किया जा सकता है। इन प्रवृत्तियों पर आधारित होकर सरकारें आर्थिक नीतियों का निरूपण करती हैं।

आर्थिक जगत में परिवर्तनों के आधार पर सरकारें आवश्यकतानुसार नीतियों में संशोधन भी करती रहती हैं। इन सभी क्रिया–कलापों में सूचकांक आधारभूत भूमिका निभाते हैं। उदाहरण के लिये माँग, पूर्ति एवं उपभोग पद्धति के सूचकांकों की सहायता से उद्योग भविष्य के उत्पादन–आपूर्ति का पूर्वानुमान करते हैं। (इसी प्रकार से सरकार द्वारा समय–समय पर घोषित मंहगाई भत्ते की वृद्धि ''जीवन निर्वाह सूचकांकों'' पर आधारित होती है।)

1.4.3 पूर्वानुमान (Forecasting)

हम उपरोक्त पक्तियों में अध्ययन कर चुके हैं कि सूचकांक पूर्वानुमान में सहायक होते हैं जिनके आधार पर आर्थिक नीतियाँ बनाई जाती है। इन पंक्तियों में इस तथ्य को और स्पष्ट किया जा रहा है कि सूचकांकों की, पूर्वानुमान में व्यापक उपयोगिता है। केवल व्यवसायिक पूर्वानुमान ही नहीं वरन् सरकार द्वारा विभिन्न आर्थिक क्रिया–कलापों जैसे औद्योगिक एवं कृषि उत्पादनों का एवं उनके वृद्धि दर का पूर्वानुमान, राष्ट्रीय आय एवं वास्तविक आय का पूर्वानुमान इत्यादि, सूचकांकों की सहायता से किया जाता है। यहाँ पर आपको पुनः स्पष्ट किया जा रहा है कि सरकार जिन आर्थिक गतिविधियों का पूर्वानुमान करके भविष्य की नीतियों का निर्माण करती हैं, सूचकांक उन सभी के आधार में स्थापित रहते हैं।

1.4.4 मुद्रा की क्रयशक्ति का मापन (Measure of Purchasing Power of Money)

मुद्रा की वास्तविक क्रय शक्ति मे होने वाले परिवतर्नों का

मापन सूचकांकों द्वारा सफलतापूर्वक किया जाता है। इसके द्वारा मुद्रा का अन्तर्भूत मूल्य एवं नामिक मूल्यों के अन्तर को भी सरलतापूर्वक ज्ञात किया जाता है। उदाहरणार्थ, आपने समाचारों द्वारा समय–समय पर पढ़ा होगा कि सन् 2009 में रुपये का मूल्य सन् 1990 की तुलना में 10 पैसे था। इसका यह आशय होता है कि, सन् 2009 में उसी जीवनस्तर को बनाये रखने के लिये सन् 1990 की तुलना में 1 रुपये के स्थान पर 10 रुपये की आवश्यकता होगी। मुद्रा स्फीति एवं अपस्फीति (संकुचन) को नियंत्रित करने में अथवा वेतन निर्धारण इत्यादि जैसे मामलों में इनके द्वारा सहायता प्राप्त होती है।

1.4.5 संकुचन के माध्यम से वास्तविक आय का अनुमान (Estimation of Real Income Through Deflation)

आप जानते हैं कि वर्तमान मूल्य स्तर पर राष्ट्रीय आय के विभिन्न आंकड़ों द्वारा व्यक्तियों के आय स्तर का अनुमान लगाया जाता है। परन्तु आय के स्तर कितने वास्तविक हैं, यह तभी जाना जा सकता है जब मुद्रास्फीर्ति एवं सकुचन की नीतियों को ध्यान में रखकर इन आंकड़ों को क्रयशक्ति के परिप्रेक्ष्य में परिवर्तित किया जाय। सूचकांको की सहायता से स्थिर मूल्यों को आधार में रखते हुए राष्ट्रीय आय को सकुंचित करके यह ज्ञात किया जाता है कि जनता की वास्तविक क्रयशक्ति में किस दिशा में परिवर्तन हुआ है। यदि ऐसा न किया जाय तो आय के स्तर के निष्कर्ष भ्रामक हो सकते हैं।

1.4.6 मजदूरी वेतन एवं भत्ता निर्धारण में सहायक (Helpful in Fixation of Wages Salaries and Allowances)

थोक मूल्य सूचकांक तथा उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की सहायता से वेतन तथा मजदूरी की दर में वृद्धि तथा मंहगाई भत्ते की दर में वृद्धि के सम्बन्ध में निर्णय लेने में सरकार को एक आधार प्राप्त होता है। इस आधार पर लिये गये निर्णयों से अधिकारी तथा श्रमिक वर्ग दोनों को सन्तोष रहता है।

1.4.7 अन्य राष्ट्रों से तुलना (Comparision with Other Nations)

सूचकाकों के माध्यम से सरकार अन्य राश्ट्रों, विकसित, विकासशील एवं अर्धविकसित राश्ट्रों की विभिन्न आर्थिक सूचनाओं से तुलना कर अपने देश की आन्तरिक आर्थिक नीतियों में आवश्यकतानुसार परिवर्तन एवं सुधार करती है। सूचकांकों सहायता से अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार नीति में भी ऐसा परिवर्तन किया जाता है जो कि द्विपक्षीय एवं बहुपक्षीय दृष्टि से सभी को स्वीकार्य एवं लाभदायक हो।

1.5. सूचकांकों का महत्त्व (Importance of Index Numbers)

सूचकांको के द्वारा विभिन्न प्रकार की सूचनाऐं प्राप्त की जाती हैं जो राष्ट्र की आर्थिक गतिविधि के निर्धारण एवं वांछित परिवर्तन में सहायक होती हैं। हम यह जानते हैं कि सूचकांकों के माध्यम से आर्थिक गतिविधियों का मापन सरलता पूर्वक किया जाता है। आर्थिक परिदृश्य का वास्तविक एवं समसामयिक आंकलन सूचकांकों द्वारा किया जाता है। सूचकांकों के द्वारा किसी आर्थिक गतिविधि का भूतकाल से लेकर वर्तमान समय तक की प्रवृत्ति का अध्ययन किया जा सकता है। इन्हीं अध्ययनों पर आधारित होकर भविष्य की नीतियों में वांछित परिवर्तन किये जा सकते हैं।

किसी राष्ट्र की अर्थ–व्यवस्था का मूल्यांकन करते समय जो मापदण्ड अपनाए जाते हैं वह राष्ट्रीय आयु (National Income), सकल घरेलू उत्पाद (Gross Domestic Product), सामान्य मूल्य स्तर (General Price Level) तथा मुद्रा की माँग एवं क्रयशक्ति (Volume and Purchasing Power of Money) इत्यादि होते हैं। इन सभी का मापन तथा समयान्तरालों में होने वाले परिवर्तन की दिषा एवं मात्रा का ज्ञान करने में सूचकांक बहुत सहायक होते हैं।

इन्हीं सूचनाओं पर आधारित होकर ब्याज दर का निर्धारण किया जाता है, जनयोपयोगी सेवाओं, जैसे यातायात, उर्जा एवं

जलसंसाधन के मूल्य निर्धारित किये जाते हैं, उद्योग एवं कृषि क्षेत्र के उत्पादन के लक्ष्य निर्धारित किये जाते हैं तथा विदेशी व्यापार के लक्ष्य भी निर्धारित किये जाते हैं। नियोजनकर्ताओं को सूचकांकों एवं उनसे प्राप्त होने वाली प्रवृत्तियों से नीति निर्धारण में बहुत सहायता प्राप्त होती है। स्टाक एक्सजेंज के संवेदी सूचकांकों द्वारा निवेषकों को निवेश से सम्बन्धी दिशा–निर्देश प्रतिदिन प्राप्त होता रहता है। संवेदी सूचकांकों द्वारा उद्योगों के निष्पादन के बारे में भी एक सूक्ष्म मूल्यांकन प्राप्त किया जाता है।

सामाजिक तथा आर्थिक आदर्शों तथा परिपाटियों का तुलनात्मक अध्ययन सूचकांक के प्रयोग से ही सम्भव हो पाता है। सूचकांकों का महत्व सीमित अर्थों में न देखकर व्यापक रूप में देखा जा सकता है। अर्थशास्त्री ब्लेयर ने सूचकांकों को व्यवसायिक पथ के पथचिन्ह एवं मार्गपट्ट कहा है, जिन पर आधारित होकर व्यवसायी व्यवसाय का प्रबंध व संचालन सफलतापूर्वक कर सकते हैं।

1.6. सूचकांकों की संरचना (Construction of Index Numbers)

सूचकांकों का निर्माण किसी प्रयोजन से किया जाता है, उपरोक्त पंक्तियों से हम जान चुके हैं कि सूचकांक क्या होते हैं एवं उनका महत्व किसी राश्ट्र की अर्थव्यवस्था में क्या होता है। सूचकांकों की सरंचना करते समय कुछ ऐसे तथ्य हैं जिन पर विचार किये बिना सूचकांकों की संरचना सहज नहीं होती है। इन तथ्यो पर विचार करने के उपरानत ही सूचकांकों की सरंचना की जाती है। यह तथ्य निम्न पंक्तियों में बिन्दुवार किये जा रहे हैं।

1.6.1. सूचकांकों का विशेष उद्देश्य (Specific Purpose of Index Numbers)

सूचकांक की संरचना करते समय सर्वप्रथम यह जान लेना आवष्यक होता है कि वह किस उद्देष्य के लिये अथवा क्या ज्ञात

करने के लिये बनाए जा रहे हैं। भिन्न–भिन्न आर्थिक गतिविधियों की जानकारी के लिए अलग–अलग प्रकार के सूचकांक बनाए जाते हैं, जैसे थोक मूल्य सूचकांकों के द्वारा मुद्रा की क्रयशक्ति में परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है। उपभोक्ताओं के जीवनस्तर एवं उपभोग की प्रवष्त्ति का अध्ययन करने के लिये जीवन निर्वाह सूचकांकों की संरचना की जाती है। अतः सूचकांक विषेश की संरचना का उद्देष्य यदि पहले ही निर्धारित कर लिया जाए तो उचित रहता है।

1.6.2. वस्तुओं का चुनाव (Selection of Commodities or Items)

सूचकांकों की संरचना का दूसरा चरण है वस्तुओं का चुनाव। वस्तुओं के चुनाव से आषय है, वह वस्तुऐं अथवा सेवाऐं जिनके मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन करना है एवं निश्कर्श रूप में प्रवृत्तियों का अथवा उपभोक्ताओं पर उनके प्रभाव का अध्ययन करना है। वस्तुओं का चुनाव बहुत महत्वपूर्ण तथा सावधानीपूर्वक किया जाने वाला कार्य है। यदि साधारण सूचकांक तैयार करना है तो एक ही वस्तु का चयन किया जाता है, जैसे, एक ही वस्तु के मूल्य तथा विक्रय की तुलना करना हो तो ऐसी स्थिति में वस्तु का चुनाव कठिन कार्य नहीं होता है। दूसरी ओर यदि संयुक्त सूचकांक बनाना है तो कई वस्तुओं को एक साथ लेना पड़ता है। ऐसे मामलों में वस्तुओं का चुनाव सावधानीपूर्वक करना पड़ता है। ऐसे सूचकांक जो कई वस्तुओं को सम्मिलित करते हुए बनाए जाते हैं, वैज्ञानिक तथा विश्वसनीय समझे जाते हैं। इसी क्रम में एक और महत्वपूर्ण तथ्य है कि जब वस्तुओं का चयन किया जाता है तो समस्या उठती है कि कौन–कौन सी वस्तुऐं सम्मिलित की जाऐं? किस प्रकार की वस्तुऐं सम्मिलित की जाए? एवं उन वस्तुओं का प्रकार क्या है? उनकी गुणवत्ता एवं किस्म कैसी हों? ऐसे प्रश्नों का उत्तर भी यदि पहले से तय हो तो उत्तम रहता है। इसके लिए निम्न बिन्दुओं पर ध्यान अवश्य देना चाहिएः–

1.6.2.1 वस्तुएं प्रतिनिधिक हो (Items Should be of Representative Character) - वस्तुओं के चुनाव के सम्बन्ध में सदैव यह बात ध्यान में होनी चाहिए कि चुनी जाने वाली वस्तुऐं समष्टि का पूर्ण प्रतिनिधित्व करती हों। उदाहरण के लिये थोक मूल्य सूचकांक को लें। थोक मूल्य सूचकांक सामान्यतयः सभी वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन को प्रदर्शित करता है। सिद्धान्तः थोक मूल्य सूचकांक में सभी वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन को सम्मिलित किया जाना चाहिए। परन्तु ऐसा सदैव सम्भव नहीं होता है और सदैव आवश्यक भी नहीं होता है। ऐसी स्थिति में उन वस्तुओं को सम्मिलित किया जाना चाहिए जो अधिक से अधिक प्रतिनिधिक चरित्र की हों, जैसे वह वस्तुऐं जिनकी माँग एवं आपूर्ति सर्वाधिक हो। यदि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक तैयार करना हो तो वह वस्तुऐं जिनका उपभोग उपभोक्ताओं द्वारा अधिक से अधिक किया जाता हो।

1.6.2.2 वस्तुओं को समान एवं प्रमापित होना चाहिए (Items Should be Similar and Standardized) - जिन वस्तुओं का चुनाव कर लिया जाता है उनमें एक विशेष बात ध्यान देने योग्य होती है, वह यह है कि चुनी हुई वस्तुऐं प्रमापित एवं समान गुणवत्ता वाली हों। सूचकांकों के द्वारा हम एक ही वस्तु के मूल्य स्तर के परिवर्तन का अध्ययन एक निष्चित समयान्तराल (जैसे प्रतिसप्ताह, प्रतिमाह, प्रति छमाही एवं प्रतिवर्ष) पर करते हैं, इसलिये जब वस्तुओं के मूल्य उद्धत किये जाएं, तब उनकी गुणवत्ता समान होनी चाहिए अन्यथा सही परिणाम नहीं प्राप्त होंगे। यद्यपि समय के साथ–साथ वस्तुओं के गुणों में परिवर्तन होता ही रहता है परन्तु प्रयास यह होना चाहिए कि परिवर्तन का प्रभाव न्यून रहे एवं परिणाम प्रभावित न होने पाए।

1.6.2.3 वस्तुओं को लोकप्रिय होना चाहिए (Items Should be Popular) -ऐसी वस्तुओं के मूल्य स्तर के परिवर्तन एवं उनके प्रभाव

का अध्ययन करना चाहिए जो लोकप्रिय हों अर्थात् व्यापक रूप से जनता द्वारा प्रयोग की जाती हों। उदाहरण के लिये कपड़ा धोने का वह साबुन, अथवा षैम्पू का वह ब्राण्ड जिसकी बिक्री राष्ट्रीय स्तर पर एवं जिसकी बाजार में हिस्सेदारी का प्रतिषत अधिक हो। ऐसी वस्तुऐं जो अभिजात्य वर्ग द्वारा ही प्रयोग की जाती हों, जिनका मूल्य सामान्यवर्ग की पहुंच से बाहर हो उनके मूल्यों में परिवर्तन एवं परिवर्तन के प्रभाव का अध्ययन करना निरर्थक होगा।

1.6.2.4 वास्तविक वस्तुओं को सम्मिलित करना चाहिए (Real Items Should be Included) - एक बात का ध्यान और रखना चाहिए कि षामिल किये जाने वाली वस्तुऐं अमूर्त न हो, भले ही उनका मूल्य हो और मूल्य में परिवर्तन भी होता हो एवं उसका प्रभाव भी बाजार पर, उपभोक्ताओं पर सरकार पर एवं कर्मचारियों पर पड़ता हो। ऐसी वस्तुओं के उदाहरण हैं जैसे ख्याति, व्यक्तिगत गुण अथवा वृद्धि इत्यादि। केवल मूर्त, एवं वास्तविक वस्तुऐं ही चुनी जानी चाहिए अन्यथा प्रयास निश्फल हो जायेंगे।

1.6.2.5 वस्तुओं की संख्या (Number of Items)- वस्तुओं की संख्या कितनी हो इसके लिये कोई पूर्व निर्धारित नियम अथवा मान्यताऐं नहीं हैं। सैद्धान्तिक रूप से यह कहा जाता है कि यदि वस्तुओं की संख्या जितनी अधिक होगी तो सूचकांक उतने ही षुद्ध परिणामों को प्रदर्षित करेंगे। परन्तु अधिक वस्तुओं के होने से बहुधा गणना की समस्या उत्पन्न हो जाती है और यदि वस्तुऐं उचित विधि से व्यवस्थित न की गई हों तो सूचकांकों से अशुद्ध परिणाम प्राप्त होंगे। सूचकांकों की संरचना करते समय व्यक्ति को सूचकांकों के प्रकार के अनुरूप वस्तुओं की संख्या निर्धारित करनी चाहिए। उदाहरण के लिये संदेवी मूल्य सूचकांकों की संरचना करते समय बहुत कम वस्तुऐं चुनी जाती हैं, यह वह वस्तुऐं होती हैं जिनके मूल्यों में

छोटे–छोटे कारणों से ही परिवर्तन आम तौर पर होता रहता है। ऐसे सूचकांक सामान्य उद्देश्य के लिये नहीं बनाए जाते हैं। सामान्य सूचकांकों में वस्तुओं की संख्या अधिक होती हैं, एवं इसी कारण से उनमें विभ्रम की सम्भावना कम हो जाती हैं तथा उनकी विश्वसनीयता बढ़ जाती है। वस्तुओं की संख्या निर्धारित करते समय, वित्त, शुद्धता का स्तर आदि तथ्यों पर विचार करना आवश्यक हो जाता है।

1.6.3. वस्तुओं का वर्गीकरण (Classification of Commodities)- सूचकांकों में सम्मिलित किये जाने वाली वस्तुओं को चुन लेने के पश्चात् उनका वर्गीकरण किया जाता है। वर्गीकरण से यहाँ पर आशय है कि वस्तुओं को उनके उपभोग के एवं उपयोगिता की प्रतिकृति अथवा समरूपता के आधार पर समूहों में बांट दिया जाता है, जैसे कि खाद्य पदार्थों का समूह, बिजली के उपकरणों का समूह, पहनने वाले कपड़ों का समूह इत्यादि। वस्तुओं को इस प्रकार से समूह में बांट देने से एक समूह के परिवर्तनों को अन्य समूह के परिवर्तनों से पष्थक करके अवलोकित किया जा सकता है। समूह में वस्तुओं को विभाजित कर देने से समकों में सजातीयता अथवा एकरूपता देखी जाती है। यदि उन समूहों को पुनः छोटे–छोटे उप समूहों में विभाजित कर दिया जाता है तो उनकी सजातीयता अथवा एकरूपता और सुदष्ढ़ हो जाती है तथा अध्ययन भी परम शुद्धता के निकट हो जाते हैं तथा अध्ययन की गहनता पर अच्छा प्रभाव पड़ता है। यहाँ पर चीनी, चावल, तथा गेहूँ जैसे ख़ाद्य पदार्थों का उदाहरण प्रासंगिक है। इनकी कई किस्में होती हैं और सभी किस्मों को शामिल करने के उपरान्त बनाए गए सूचकांक अधिकाधिक प्रतिनिधिक होते हैं।

1.6.4. मूल्यों का चुनाव (Selection of Prices)

सूचकांकों की संरचना करते समय मूल्यों का उचित रीति से चुनाव बहुत महत्वपूर्ण होता है। इस कार्य में बहुधा यह समस्या

दृष्टिगोचर होती है कि मूल्यों के उद्धरण कहां से प्राप्त किये जाएं। इस कार्य के लिये सरकार द्वारा प्रकाषित तथा व्यवसायिक संगठनों द्वारा पत्र–पत्रिकाओं में प्रकाशित मूल्य समंकों का प्रयोग कर लिया जाता है। मूल्यों को उन सभी स्थानों से एकत्रित करना कठिन होता है जहां एक विशिष्ट वस्तु क्रय या विक्रय की जाती है। इस संदर्भ में एक कठिनाई और सामने आती है, वह यह है कि उन सभी स्थानों में मूल्य बहुधा समान नहीं होते हैं, अक्सर एक ही वस्तु के मूल्य भिन्न–भिन स्थानों में एक जैसे नहीं होते हैं। ऐसे मामलों में ऐसे प्रतिनिधिक स्थानों से मूल्यों को लिया जाता है जहां वस्तुओं का बड़ी मात्रा में क्रय–विक्रय होता है, क्योंकि ऐसे स्थानों के मूल्य से छोटे स्थानों के मूल्य प्रभावित होते हैं। मूल्यों को प्राप्त करने के लिये कुछ व्यक्तियों की सहायता ली जाती है जो समय–समय पर मूल्यों को संदर्भित करते हैं। समाचार पत्रों में प्रकाशित मूल्य भी इस कार्य में प्रयोग किये जाते हैं। इस कार्य में एक सावधानी यह रखनी चाहिए कि प्राप्त मूल्यों को प्रयोग करने से पहले उनकी विश्वसनीयता का परीक्षण कर लिया जाय। मूल्यों का चुनाव करते समय निम्न तथ्यों पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता रहती है।

1.6.4.1. थोक अथवा फुटकर मूल्य (Wholesale or Retail Prices)- थोक मूल्य लिये जाए अथवा फुटकर मूल्य, यह सबसे पहले निश्चित हो जाना चाहिए। यह कार्य कठिन नहीं है, इसके लिये सूचकांकों की प्रकृति का विचार करना चाहिए। यदि सामान्य उद्देशीय सूचकांकों अथवा ''थोक मूल्य सूचकांकों'' का निर्माण करना हो तो थोक मूल्य लिये जाते हैं। यदि ''जीवन निर्वाह सूचकांकों'' का निर्माण करना है से फुटकर मूल्यों को लिया जाता है। थोक मूल्य एवं फुटकर मूल्यों के विषय में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि थोक मूल्यों में स्थिरता रहती है एवं माँग एवं आपूर्ति के प्रति यह संवेदनशील होते हैं। दूसरी ओर फुटकर मूल्यों में स्थिरता का आभाव रहता है एवं उनमें स्थान–स्थान पर उच्चावचन देखने को मिलता है तथा मांग एवं आपूर्ति का प्रभाव इन पर थोक मूल्यों की तुलना में देर से पड़ता है। थोक मूल्य फुटकर मूल्यों की अपेक्षा अधिक संवेदनशील होते हैं एवं इसी कारण से विश्वसनीय होते हैं। सामान्यतयः थोक मूल्य सूचकांकों में उन मूल्यों को लिया जाता है जिन पर व्यापारी वस्तुओं का क्रय अथवा विक्रय करते हैं।

1.6.4.2. मूल्यों की प्राप्ति के केन्द्र (Centers for Procurement of Prices)- मूल्य कहां से प्राप्त किये जाए यह एक विचारणीय बिन्दु है। यह भी निर्भर करता है सूचकांकों के प्रयोजन एवं प्रासंगिकता पर। यदि स्थानीय स्तर पर प्रयोज्य जीवन निर्वाह सूचकांक का निर्माण करना है तो उसी स्थान विशेष से मूल्यों को लेना चाहिए। यदि सामान्य रूप से प्रयोज्य थोक मूल्य सूचकांक का निर्माण करना हो तो देष के बड़े–बड़े बाजारों तथा मण्डियों से मूल्यों को लेना चाहिए।

1.6.4.3. मूल्य प्राप्ति के साधन(Means of Procurement of Prices)- मूल्यों को प्राप्त करने के स्थान को चिन्हित करने के साथ ही साथ मूल्यों को प्राप्त करने के साधन अथवा स्रोतों को भी चिन्हित कर लेना चाहिए। इस कार्य के लिये मूल्यों को उनके स्रोत से, सूचकांक निर्मित करने वाले व्यक्ति अथवा व्यक्तियों को उपलब्ध कराने के लिए एक सर्वेक्षण संगठन अथवा समूह को इस कार्य के लिये नियुक्त कर देना चाहिए। यह समूह चिन्हित व्यापारियों तथा स्थापित मण्डियों में जाकर मूल्यों को प्रतिनिधिक रूप से एकत्र कर सकता है। समाचार पत्रों में भी विभिन्न मण्डियों के मूल्य संदर्भ प्रकाषित होते रहते हैं। इस प्रकार के प्रकाषित मूल्य यदि विष्वसनीय होते हैं तो सूचकांकों के निर्माण में बहुत सहायता प्राप्त होती है।

1.6.4.4.मूल्य प्राप्ति की बारम्बारता (Frequency of Procurement of Prices) - मूल्य प्राप्ति की बारम्बारता से यहाँ पर आषय है कि कितने समयान्तराल पर मूल्यों को प्राप्त अथवा एकत्रित किया जाए। इस विशय में सूचकांकों की संरचना करने वाले व्यक्ति अथवा संस्था द्वारा निर्णय लिया जाना आवष्यक होता है। मूल्यों को प्राप्त करने की बारम्बारता के विशय में कोई स्थापित नियम नहीं है। सिद्धान्त तो यह कहता है कि जितने अधिक बार मूल्य संदर्भित किये जायेंगे सूचकांक उतने ही अधिक विश्वसनीय होगें। परन्तु मूल्य संदर्भों का अधिक्य कई बार जटिलाऐं उत्पन्न करता है। होती हैं। वस्तुओं की प्रकृति तथा सूचकांक की अवधि के आधार पर मूल्यों को प्राप्त करने की बारम्बारता को निर्धारित किया जा सकता है। यदि सूचकांक को साप्ताहिक बनाया जाता है तो सप्ताह में एक बार प्राप्त किये गए मूल्य समुचित होगें। इसी प्रकार से मासिक सूचकांकों के लिए माह में चार बार संदर्भित मूल्य संतोषजनक होंगे।

1.6.4.5. मूल्यों को अभिव्यक्त करने का आधार (Basis for Expression of Prices)- यद्यपि मूल्यों को अभिव्यक्त करना कोई समस्या का विशय नहीं है, फिर भी इस बिन्दु पर मूल्य दो प्रकार से संदर्भित किये जाते हैं, (i) वस्तु की मात्रा को मुद्रा की प्रति इकाई के रूप में, (ii) मुद्रा की मात्रा को वस्तु की प्रति इकाई के रूप में। वस्तु की मात्रा को मुद्रा की इकाई के रूप में व्यक्त करने की विधि को वस्तुमूल्य (Commodity Price) कहते हैं, जैसे–तीस रुपये प्रति दर्जन। दूसरी विधि में जब मुद्रा की मात्रा को वस्तु की प्रति इकाई के रुप में व्यक्त करते हैं–तब उसे मुद्रामूल्य (Money Price) कहते हैं, जैसे 5 रुपये में 40 किग्रा0 अथवा 1 रु0 में 8 किग्रा0 किस प्रकार के मूल्यों को सूचकांक में प्रयोग किया जाय यह समय, परिस्थित एवं प्रथा के अनुसार निर्धारित किया जाता है, जैसे थोक मूल्य सूचकांकों की

रचना में मुद्रा की मात्रा में वस्तुओं की प्रति इकाई (Money Price) के रूप में प्रयोग किया जाता है।

1.6.5. आधार का चुनाव (Selection of Base)

सूचकांक सदैव तुलनात्मक रूप से तैयार किये जाते हैं इसका आषय है कि वर्तमान वर्ष के लिये सूचकांक किसी एक निश्चित वर्श (जिसको आधार के रूप में माना जाता है) की तुलना में तैयार किये जाते हैं। अर्थात् किसी वर्तमान आर्थिक गतिविधि के स्तर में सापेक्ष परिवर्तन के मापन की तुलना उसी आर्थिक गतिविधि की किसी एक पूर्ववर्ती अवधिकाल अथवा तिथि से करते हैं। इस पूर्ववर्ती अवधिकाल अथवा तिथि को सूचकांक आधार अवधि कहते हैं। दूसरे शब्दों में यदि कहा जाए तो वर्तमान वर्श के लिए सूचकांक किसी एक निश्चित वर्श (आधार वर्ष) की तुलना में तैयार किये जाते हैं। इस आधार वर्ष का चुनाव करना ही सबसे महत्वपूर्ण एवं संवेदशील कार्य है। आधार वर्ष का चुनाव बहुत ही सावधानी के साथ करना चाहिए तभी सूचकांक वास्तविकता के अनुरूप होंगे। आधार वर्श ज्ञात करने की दो विधियाँ है जिन्हें निम्न पंक्तियों में व्यक्त किया गया है।

1.6.5.1. स्थिर आधार विधि (Fixed Base Method)-जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है कि इस विधि में आधार स्थित होता है। इस प्रक्रिया में सर्वप्रथम स्वविवेक से एक सामान्य वर्ष आधार के रूप में चुन लिया जाता है तत्पश्चात् अन्य वर्शें के मूल्यों की तुलना इस स्थिर आधार वर्श से की जाती है। कभी–कभी किसी एक विशेष वर्श को आधार के रूप में चुनने के स्थान पर एक समयावधि को चुन लिया जाता है और उस अवधि के मूल्यों के औसत को आधार के रूप में मान लिया जाता है। स्थिर आधार वर्ष को चुनने के लिये एक सामान्य परिस्थिति होनी चाहिए। सामान्य परिस्थिति से आषय है कि आधार वर्ष ऐसा हो जिसकी परिस्थितियाँ सामान्य रही हों। इससे यह आशय है कि

आधार वर्श में कोई असामान्य परिस्थिति अथवा घटना न देखी गई हो। जैसे कि युद्ध, महामारी, अकाल, बाढ़, तेजी या मन्दी इत्यादि न घटित हुई हों। यूं तो कोई भी काल सामान्य नहीं कहा जा सकता है। प्रत्येक काल में किसी न किसी प्रकार से मूल्यों में उतार–चढ़ाव होते ही रहते हैं। अतः आधार वर्श को चुनते समय स्वविवेक से ऐसा वर्ष आधार के रूप में चुनना चाहिए जो आर्थिक विश्लेषणों के आधार पर सामान्य कहा जाता हो अथवा प्रतीत हो। यदि इस संदर्भ में कोई भ्रम हो तो कुछ वर्षों के मूल्यों के माध्य को आधार के रूप में स्वीकार करके दूर किया जा सकता है।

स्थित आधार विधि में मूल्यों के सापेक्ष अर्थात् तुलना के लिये मूल्यानुपात निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते है–

$$\text{वर्तमान वर्श के मूल्य सापेक्ष} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष के मूल्य}}{\text{आधार वर्ष के मूल्य}} \times 100$$

$$\text{Cuvrrent Year's Price Relative} = \frac{\text{Current Year's Price}}{\text{Base Year's Price}} \text{X} 100$$

1.6.5.2. श्रंष्खला आधार विधि (Chain Base Method)- आधार वर्ष को चुनने की दूसरी विधि है श्रृंखला आधार विधि इस विधि में कोई आधार वर्ष स्थिर नहीं होता है। इस विधि में आधार परिवर्तित होता रहता है। इस विधि में दिये गए मूल्यों को परवर्ती काल (Previous Year) के मूल्यों के प्रतिषत के रूप में रक्खा जाता है। इस विधि में प्रत्येक वर्तमान वर्ष के लिये उसका परवर्ती वर्ष आधार वर्ष की भांति कार्य करता है। इस विधि के द्वारा अल्पकालीन परिवर्तनों का ज्ञान प्राप्त होता रहता है। इस विधि में सूचकांक में सम्मिलित की गई वस्तुओं की सूची को भी समयानुसार परिवर्तित किया जा सकता है।

श्रंखला आधार विधि में मूल्यों के सापेक्ष अर्थात् तुलना के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते है–

$$\text{श्रृंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{चालू वर्ष के मूल्य}}{\text{गत वर्ष के मूल्य}} \times 100$$

$$\text{Chain Price Relatives} = \frac{\text{Current Year's Price}}{\text{Previous Year's Price}} \times 100$$

1.6.5.3. आधार में परिवर्तन (Base Conversion) - कभी–कभी आध ाार में परिवर्तन भी किया जाता है। ऐसा परिस्थिति अथवा आवश्यकता के अनुरूप किया जाता है। यह परिवर्तन दो प्रकार से किया जाता है।

1.6.5.3.1. स्थिर आधार से श्रृंखला आधार में परिवर्तन (Conversion to Chain base from Fixed Base) - इसके लिये प्रथम वर्ष के श्रृंखला आधार सूचकांक को 100 मान लेते हैं तथा आगामी वर्षों के लिये गत वर्ष के स्थिर आधार सूचकांक को आधार मान लेते हैं। इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\text{चालू वर्ष का श्रृंखला सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्षीय स्थिर आधार सूचकांक}}{\text{गतवर्षीय स्थिर अधार सूचकांक}}$$

$$\text{current Year's Chain Index} = \frac{\text{Current years Fixed Base Index Number}}{\text{Previous Years' Fixed Base Index Number}} \times 100$$

1.6.5.3.2.स्थिर आधार से श्रृंखला आधार में परिवर्तन (Conversion to Chain base from Fixed Base)-इस विधि में प्रथम वर्ष का स्थिर आधार सूचकांक वही माना जाता है जो उस वर्तमान वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक होता है। यदि प्रथम वर्ष को ही स्थिर आधार मानकर सूचकांक का निर्माण करना है तो प्रथम वर्ष का सूचकांक 100 ही माना जाएगा। संगामी वर्षों में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा।

$$\text{चालू वर्श का स्थिर आधार सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का श्रृंखला आधार सूचकांक x गतवर्ष का स्थिर आधार सूचकांक}}{100}$$

Current Year's Fixed Base Index Number=

$$\frac{\text{Current Year's Chain Base Index X Previous Year's Fixed Base Index}}{100}$$

1.6.6. माध्य का चुनाव (Selection of Average)

अबतक के अध्ययन से आप जान चुके हैं कि सूचकांकों में कई वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन का विश्लेषण किया जाता है, इसलिये इनका उचित एवं वास्तविक विश्लेषण तभी हो सकता है कि जब उनके मूल्यों को एक औसत के रूप में प्रस्तुत किया जाए। सैद्धान्तिक रूप से तो कोई भी माध्य का प्रयोग किया जा सकता है परन्तु बहुप्रचलित रूप में सामान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य एवं माध्यिका का ही प्रयोग होता है। अग्रिम पंक्तियों में तीनों माध्यों के प्रयोग एवं उनकी उपयोगिता का विश्लेषण प्रस्तुत किया जा रहा है।

1.6.6.1. समान्तर माध्य (Arithmetic Average)- समान्तर माध्य की गणना करना एवं उसको समझना सरल होता है, इस दृष्टि से इसका प्रयोग अधिकतर मामलों में किया जाता है। समान्तर माध्य को लेने में कठिनाई यह होती है कि यह एक निरपेक्ष माप है तथा बड़ी संख्याओं का इसके ऊपर प्रभाव अधिक होता है। सूचकांकों में किसी सापेक्ष माप का होना उचित होता है। क्योंकि इनमें प्रतिशतों का प्रयोग होता है। किसी एक भी वस्तु के मूल्य में यदि भारी परिवर्तन होता है तो उससे पूरा सूचकांक प्रभावित हो जाता है। इन कारणों से समान्तर माध्य के प्रयोग को उपयुक्त (Suitable) नहीं कहा जा सकता है।

1.6.6.2. गुणोत्तर माध्य(Geometric Mean) - समान्तर माध्य की तुलना में गुणोत्तर माध्य की गणना करना थोड़ा कठिन होता है। परन्तु इसमें एक गुण यह होता है कि यह सापेक्ष माप है, और हम जानते हैं कि सूचकांक सापेक्ष परिवर्तनों का विश्लेषण करता है इसलिए

गुणोत्तर माध्य इस दर्षिट से एक उपयुक्त (Suitable) माध्य है। चूंकि गुणोत्तर माध्य में उतक्राम्यता (Reversibility) होती है, इसलिये बड़े परिवर्तनों का इसके ऊपर प्रभाव नहीं पड़ता है। इसके कारण सूचकांकों के निश्कर्श वास्तविक एवं विष्वसनीय होते हैं। इसलिये सूचकांकों के लिये गुणोत्तर माध्य को पसंद का माध्य (Average of Choice) माना जा सकता है।

1.6.6.3. मध्यिका (Median)- मध्यिका की गणना बहुत ही सरल होती है एवं यह बड़ी संख्याओं से अप्रभावित रहती है। परन्तु यह भी एक निरपेक्ष माप है एवं इसको प्रतिनिधिक चरित्र का नहीं कहा जा सकता है। मध्यिका की एक सीमा यह भी है कि कई अवसरों पर इसका मूल्य अन्तर्वेशन (interpolation) के द्वारा ज्ञात किया जाता है। इन कारणों से सूचकांक में इसके प्रयोग को उचित नहीं कहा जा सकता है।

1.7. सूचकांकों का वर्गीकरण (Classification of Index Numbers)

सूचकांकों के द्वारा विभिन्न चरों के मापन के आधार पर उनको तीन प्रमुख प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

1.7.1. मूल्य (कीमत) सूचकांक (Price Indices)

इस प्रकार के सूचकांकों की सार्वभौमिक उपयोगिता होती है। जब हम सूचकांकों की बात करते हैं तो इन्हीं सूचकांकों का स्वरूप हमारे मस्तिश्क में बन जाता है। मूल्य अथवा कीमत सूचकांक एक वस्तु या कई वस्तुओं के मूल्यों (कीमतों) पर विचार करतें हैं तथा एक समयावधि से दूसरी समयावधि या एक स्थान से दूसरे स्थान में मूल्यों में हुए सापेक्ष परिवर्तन का अध्ययन करतें है। थोक मूल्य सूचकांक (Wholesale Price Index) तथा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index) इसके लोकप्रिय उदाहरण है।

1.7.2. मात्रा सूचंकाक (Quantity Indices)

इस प्रकार के सूचकांकों के तुलनात्मक अध्ययन का क्षेत्र भौतिक मात्राओं में हुआ परिवर्तन होता है। ऐसे सूचकांक एक वस्तु अथवा कई वस्तुओं की भौतिक मात्रा में हुए परिवर्तन का किसी समयावधि में सापेक्ष अध्ययन करते हैं। कषशि उत्पादन (खाद्यान्न) सूचकांक, (Agricultural Produce (food grains) Indices) एवं औद्योगिक उत्पादन सूचकांक (Industrial Produce Indices) इसके उदाहरण हैं।

1.7.3. कुलमूल्य सूचंकाक (Value Indices)

कुल मूल्य सूचकांक वास्तव में दो चरों के कुल मूल्य जैसे मात्रा X कीमत (Quantity X Price) की तुलना दो समयावधियों के मध्य करते हैं दूसरे षब्दों में यह कीमत (Prices) तथा मात्रा (Quantity) के संयुक्त प्रभाव का सापेक्ष अध्ययन करते हैं। ऐसे सूचकांकों की उपयोगिता (कृशि अथवा उद्योग) के क्षेत्र में अधिक उपयोगी होती है।

1.8. सूचकाकों संरचना करने की विधियां (Methods of Constructing Index Numbers)

अब तब के अध्ययन से आप सूचकांकों की प्रकृति, उद्देश्य, उनके प्रकार, उनकी उपयोगिता इत्यादि के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। इस खण्ड में आप यह अध्ययन करने जा रहे हैं कि सूचकांकों की संरचना किस प्रकार से की जाती है एवं उनकी गणना करने की कौन सी विधियाँ हैं।

सूचकांक बनाने की कई प्रचलित विधियाँ है। उन सभी विधियों को दो समूह में बांटा जा सकता है–जिनका निम्न पंक्तियों में व्यापक अध्ययन किया जा रहा है।

1.8.1. आभारित (साधारण) सूचकांक (Un-weighted Index Numbers)

अभारित सूचकांकों को साधारण सूचकांक भी कहा जाता है। अभारित सूचकांकों की संरचना करते समय यह मान लिया जाता है कि जिन–जिन वस्तुओं का अध्ययन किया जा रहा है उन सभी का भार (weight) अथवा सापेक्षिक महत्व एक समान है। अभारित सूचकांक रचना की दृष्टि से दो प्रकार से संरचित किये जा सकते हैं–

1.8.1.1.सरल समूही सूचंकाक (Simple Aggregative Index)- सूचकांकों की संरचना करने की यह अत्यन्त सरल विधि है। इस विधि में वर्तमान वर्ष के कुल मूल्यों के योग (aggregate) को आधार वर्ष के मूल्यों के योग (aggregate) के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं। सूत्र के रूप में इसे निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया जाता है।

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma Po} x100$$

जहाँ पर

ΣP_{01} = सूचकांक वर्तमान वर्ष का (Index Number of current year)

ΣP_1 = वर्तमान वर्ष के मूल्यों (कीमतों) का योग

aggregate of current year prices

ΣPo आधार वर्श के मूल्यों (कीमतों) का योग

aggregate of base year prices

इसी प्रकार से यदि मात्रा सूचकांक का निर्माण करना हो तो सूत्र निम्न प्रकार से होगाः–

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_o} x100$$

Σq_1 = वर्तमान वर्ष की मात्राओं का योग

aggregate of current year prices

Σq_o = आधार वर्ष की मात्राओं का योग

aggregate of base year quantity

Q_{01} = मात्रा सूचकांक (वर्तमान वर्ष कें)

Quantity Index (of Current Year)

उदाहरण– निम्न समकों से सरल समूहि रीति द्वारा वर्ष 2000 को आधार वर्ष मानकर वर्श 2005 के लिये सूचकांक की रचना करिए।

Example- Construct Index Number for the year 2005 taking the year 2000 as base from the following data.

वस्तुऐं (Commodities)	A	B	C	D	E
मूल्य–2000 रु0 (Price-2000) Rs.	12	25	10	5	6
मूल्य–2005 रु0 (Price-2005) Rs.	15	20	12	10	15

हल (Solution)

(Commodities) वस्तुऐं	Price in 2000 मूल्य–2000 Rs.	Price-2005 मूल्य–2005 Rs.
A	12	15
B	25	20
C	10	12
D	5	10
E	6	15
Total	**58**	**72**

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_o} x100$$

$$= \frac{72}{58} x100 = 124.1$$

इसी विधि में आपने देखा कि सूचकांक की रचना करना तथा गणना करना एक अत्यन्त सरल प्रक्रिया है। यहाँ पर दोनों वर्षों के मूल्यों के योग के प्रतिषत मात्र की ही गणना की गई है।

इस विधि के कुछ आधारभूत सीमाऐं हैं:–

(i) इस विधि में वस्तुओं के सापेक्षिक महत्व उपेक्षित रहता है।

(ii) इस विधि द्वारा निर्मित सूचकांकों में वस्तुओं के मूल्यों के विस्तार का प्रभाव पड़ता है।

1.8.1.2. मूल्य अनुपातों का माध्य (Simple Average of Price Relatives)

इस विधि में सबसे पहले प्रत्येक वस्तु के मूल्यों के अनुपात (आधार वर्ष से) निकाले जाते हैं। इसके लिये, प्रत्येक वस्तु के वर्तमान मूल्य में आधार वर्ष के मूल्य का भाग देकर 100 से गुणा करके मूल्य अनुपात (सापेक्ष) ज्ञात कर लेते हैं। मूल्यों के अनुपातों के योग में वस्तुओं की संख्या (N) से भाग देकर सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है। इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$P_{01} = \Sigma \frac{\left[\frac{P_1}{P_0} \times 100\right]}{N}$$

यहाँ पर N = वस्तुओं की संख्या (Number of Items)

P_1 = वर्तमान वर्ष के मूल्य (कीमत)

Prices of Current Year

P_0 =आधार वर्ष के मूल्य (कीमत)

Prices of Base Year

उदाहरण– नीचे दिये गई सूचनाओं से मूल्य अनुपातों के माध्य के आधार पर वर्श 2000 को आधार मानते हुए वर्श 2005 के लिये सूचकांक की रचना करिये।

Example- From the following information, construct Index numbers for the year 2005 taking the year 2000 as base on the basis of average of price relatives.

वस्तुऐं Commodities	गेहूँ Wheat	कपड़ा Clothing	रसोई गैस Cooking Gas	बिजली Electricity	गृह किराया House Rent
मूल्य (2000)रु0	200	120	75	100	80
मूल्य (2005) रु0	250	150	100	75	100

हल **(Solution)**

Construction of Price Index Numbers

मूल्य सूचकांकों की रचना

Items	Price 2000 Rs.P_o	Price 2005 Rs.P_1	Price Relations P_1/P_o x 100
Wheat	200	250	$\frac{250}{200}\times 100 = 125$
Clothing	120	150	$\frac{150}{120}\times 100 = 125$
Cooking Gas	75	100	$\frac{100}{75}\times 100 = 133$
Electricity	100	75	$\frac{100}{80}\times 100 = 125$
			$\Sigma\left[\frac{P_1}{P_o}\times 100\right] = 583$

$$P_{01} = \Sigma\left[\frac{p_1}{p_o}\times 100\right]$$

इस उदाहरण में मूल्य अनुपातों का सूचकांक 117 है जो मूल्यों (कीमतों) में 17 प्रतिषत की वर्षद्धि दर्षाता है।

इस विधि के कई गुण है जैसे

(i) यह सूचकांक उन इकाईयों से प्रभावित नहीं होता है जिनके माध्यम से मूल्यों को संदर्भित किया जाता है।

(ii) मूल्यों को सापेक्ष रूप में परिवर्तित कर दिये जाने के कारण, निरपेक्षता से मुक्त रहता है।

(iii) यह सूचकांक सभी वस्तुओं को समान महत्व देता है तथा अत्यधिक मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है।

इस विधि की कुछ सीमाऐं भी हैं। जैसे–

(i) अभारित होने के कारण सभी वस्तुओं का महत्व एक बराबर समझा जाता है।

(ii) समान्तर माध्य को सूचकांकों की दृष्टि से आदर्श माध्य के रूप में नहीं स्वीकार किया जा सकता है।

1.8.2. भारित सूचंकाक (Weighted Index Numbers)

भारित सूचकांकों की संरचना करते समय विभिन्न वस्तुओं को उनके महत्ता के अनुसार सापेक्षिक महत्व प्रदान किया जाता है, जिसके कारण इनकी विश्वसनीयता अधिक रहती है। यह दो प्रकार से तैयार किये जाते हैं।

1.8.2.1. भारित समूही रीति (Weighted Aggregative Method)

1.8.2.2. मूल्यानुपातों का भारित माध्य (Weighted Average of Price Relatives) -

भारित सूचकांकों का अध्ययन अगली इकाई में विस्तार से किया गया है।

1.9. सारांश (Summary)

अर्थव्यवस्था के विभिन्न उपादन (factors) जैसे मूल्य, उत्पादन, व्यवसाय एवं वाणिज्य, जीवन लागत आदि, नित्य ही परिवर्तन के दौर से परागमन करते रहते हैं। अर्थव्यवस्था तभी सफल अथवा विकासशील कहलाती है जब उसमं स्पंदन होते हों। जड़ता विकास का द्योतक नहीं हो सकती है। इन परिवर्तनों का मापन सूचकांकों के माध्यम से किया जाता है। सूचकांक भी एक विषेश प्रकार के माध्य ही होते हैं जिनके द्वारा परिवर्तनों का सापेक्ष रूप में अध्ययन किया जाता है। सूचकांकों के द्वारा किसी तथ्य के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों का समय या स्थान के आधार पर मापन किया जाता है। सूचकांक, आर्थिक जगत के परिवर्तनों का मापन एक निश्चित समयान्तराल पर करते हैं जिसके द्वारा सभी वर्गों को उनके आर्थिक व्यवहार में दिशा–निर्देशन प्राप्त होता है। जो परिवर्तन प्रत्यक्ष रूप से तुलनीय नहीं होते हैं उन्हें सूचकांकों के द्वारा मापित किया जाता है।

सूचकांक एक सापेक्ष संख्यात्मक मापन का माध्यम होते हैं। इनकी गणना में प्रतिषतों के माध्य का प्रयोग किया जाता है। सूचकांक एक समयान्तराल के परिवर्तनों का अध्ययन दूसरे समयान्तराल से करते हैं। सूचकांकों की व्यापक उपयोगिता होती है, विशेष तौर पर आयात निर्यात, पूर्वानुमान, सरकारी नीति एवं स्टाक एक्सचेंज की नीतियों एवं व्यवहार का निर्धारण सूचकांकों के द्वारा किया जाता है।

सूचकांकों के द्वारा व्यापक रूप से विविध वस्तुओं के मूल्यों के परिवर्तन एवं प्रभाव का ज्ञान प्रापत होता है। सूचकांक थोक एवं फुटकर दोनों प्रकार के मूल्यों के सापेक्ष परिवर्तनों का मापन करता है। इसकी गणना करने के लिये किसी एक वर्श के मूल्य को आधार मान कर परिवर्तनों का सापेक्ष अध्ययन होता है। आधार भी दो प्रकार से प्रयोग किये जाते हं स्थिर एवं श्रंखला के रूप में सूचकांको

संरचना करने की दर्ष्टि से दो प्रकार के होते हैं अभारित एवं भारित। भारित सूचकांकों में वस्तुओं के महत्व को एक समान माना जाता है। भारित सूचकांकों में वस्तुओं को उनके महत्व के अनुसार भार प्रदान किया जाता है।

1.10. शब्दावली (Terminology)

1. **सूचकांक (Index Number)-**सम्बन्धित चरों के सापेक्ष परिवर्तन के महत्व एवं प्रभाव का मापन करने का माध्यम।
2. **आधार अवधि (Base Period)-**एक संदर्भित अवधि, जिस पर आधारित होकर तुलना की जाती है।
3. **मूल्य सूचकांक (Price Index)-**एक समयावधि में मूल्यों के चरों में परिवर्तन का मापना।
4. **कुल मूल्य सूचकांक (Value Index)-**कुल मौद्रिक मूल्य का एक निश्चित समयावधि में मापन।

1.11. स्वअभ्यास प्रश्न (Self Exercise Questions)

1. निम्न सूचकांकों की रचना करिये (i) वर्श 1994 को आधार मान कर एवं (ii) श्रृंखला आधार विधि द्वारा :–

From the following Index Numbers, construct indices (i) taking the year 1994 as base (ii) by chain base method.

वर्ष Year	1991	1993	1993	1994	1995	1996
सूचकांक Index Numbers	100	110	175	250	300	400

उत्तर = 1992–110, 1993–159, 1994–143, 1995–120, 1996–133

2. निम्न समंको से वर्ष 2009 के लिये, वर्श 2008 के मूल्यों को आधार मानकर, थोक मूल्य सूचकांक की रचना करिये–

Construct wholesale price Index Numbers for the year 2009 taking the year 2008 as base.

वस्तुएँ Commodities	Wholesale price per quintal	
	2008	2009
दाल (Pulses)	7.3	7.7
चावल (Rice)	7.7	5.5
गेहूँ (Wheat)	7.0	8.0
कपास (Cotton)	6.5	7.3
गुड़ (Gur)	34.1	29.8
मक्का (Maze)	17.3	17.1

उत्तर = 98 (वर्श 2009 के लिए)

3. निम्न श्रृंखला आधार विधि के द्वारा निर्मित सूचकांको से स्थिर आधार विधि के सूचकांकों की रचना करिये :–

From the chain base Numbers given below, prepare fix base index numbers.

वर्ष Year	2000	2001	2002	2003	2004
सूचकांक Index Numbers	110	160	140	200	150

उत्तर = 2000–110, 2001–176, 2002–246, 2003–493, 2004–739.

4. निम्न स्थिर आधार विधि से निर्मित सूचकांको से श्रृंखला आधार विधि के सूचकांकों की रचना करिये :–

From the following fixed base Index Numbers prepare fix base index numbers.

वर्ष Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006
सूचकांक Index Numbers	188	196	204	190	196	100

उत्तर = 2001–100, 2002–104, 2003–104, 2004–93, 2005–103, 2006–57.

1.12. प्रस्तावित उपयोगी पुस्तकें (Suggested Useful Readings)

1. डॉ0 एस0एम0 षुक्ल, डॉ0 एस0पी0 सहाय, (2007), सांख्यिकी के सिद्धान्त, साहित्य भवन पब्लिकेषस आगरा।

2. Hooda, R.P., (2001) Statistics for Business & Economics, Mc. Millan India. Ltd., New Delhi.

3. Richard. I. Levin and Devid S. Rubin (1996), Statistics For Management, Printice Hall India Pvt. Ltd., Mumbai.

4. Elhance D.N., Elhance. Veena., Aggawal B.M., (2005), Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, Allahabad.

5. Gupta S.C., (2000), Fundamentals of Statistics, Himalaya Publishing House, New Delhi.

इकाई- 2 भारित सूचकांक WEIGHTED INDEX NUMBERS

2.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप

- भारित सूचकांक की अवधारणा से परिचित होंगे,
- भारित सूचकांकों की रचना के प्रयोजन को स्पष्ट कर सकेंगे,
- भार से क्या आशय है, इसका ज्ञान प्राप्त करेंगे,
- भारित सूचकांकों के प्रकार का ज्ञान प्राप्त करेंगे,

- भारित सूचकांक की संरचना करने में सक्षम हो सकेंगे,
- भारित सूचकांकों की वास्तविक उपयोगिता को प्रवाचित कर सकेंगे,
- जीवन निर्वाह सूचकांक एवं पारिवारिक बजट सूचकांक के महत्व एवं उपयोगिता का ज्ञान प्राप्त करेंगे,
- सूचकांकों के शिरोबन्धन एवं संकुलन की विधि से परिचित होंगे,
- सूचकांकों द्वारा वास्तविक परिवर्तन के अध्ययन का विश्लेषण कर सकेंगे।

2.1 परिचय (Introduction)

आपने पिछली इकाई में अध्ययन किया है कि साधारण सूचकांकों की रचना करते समय सभी सम्मिलित वस्तुओं को एक समान महत्व का मान कर उनके सापेक्ष परिवर्तन का अध्ययन किया जाता है। ऐसे सूचकांकों को अभारित सूचकांक कहा जाता है। (ऐसे अभारित सूचकांकों में मूल्यों में सापेक्ष परिवर्तन के माध्यों की गणना समान्तर माध्य अथवा गुणोत्तर माध्य अथवा मध्यिका की विधि के द्वारा कर ली जाती है।) आपको एक तथ्य यहाँ पर पुनः स्पष्ट किया जा रहा है कि यदि किसी श्रेणी में सम्मिलित वस्तु समान महत्व की न हो अथवा उनके सापेक्ष महत्व समान न हों तो ऐसी परिस्थिति में भारित माध्य, शुद्ध परिणाम प्रदान करते हैं। भारित सूचकांकों की गणना करते समय विभिन्न वस्तुओं का तुलनात्मक अवलोकन करके उनके महत्व के अनुसार भार प्रदान किया जाता है। ऐसा करने से वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन का, सिर्फ कीमतों के आधार पर नही वरन् उनके महत्व के आधार पर, अध्ययन किया जा सकता है। इस विधि से निर्मित सूचकांक तर्कपूर्ण होते हैं। भारित सूचकांको की अवधारण को अग्रिम पंक्तियों में स्पष्ट किया जा रहा है।

2.2 भारत सूचकांको का अर्थ एवं अवधारणा (Meaning & Concept of Weighted Index Numbers)

अब तक के अध्ययन में आपको यह जानकारी हो गयी है कि सूचकांकों से प्राप्त परिणाम तभी शुद्ध हो सकते हैं जब उनका विश्लेषण तर्कपूर्ण एवं वैज्ञानिक विधि से किया जाय। अभारित सूचकांकों के बारे में आप अध्ययन कर चुके हैं कि उनमे वस्तुओं के समान महत्व (भार) को मानते हुए अध्ययन किया जाता है। आप यह भी जानते हैं कि सभी वस्तुएं एक समय महत्व की नहीं होती है इसलिए किसी एक ही कसौटी पर उनका परीक्षण अथवा सापेक्ष परिवर्तन का मापन नहीं करना चाहिए। चूँकि सूचकांकों में सम्मिलित वस्तुएं भिन्न–भिन्न प्रकार की एवं विविधता लिए हुए होती हैं इसलिए उनको भार अवष्य प्रदन किया जाना चाहिए। अब प्रष्न यह उठता है कि भार से क्या आषय है? क्या यह साधारण वजन है जो उत्पादन अथवा उपभोग के आधार पर सन्दर्भित किये जाते हैं। आपको स्पश्ट रूप से समझ लेना चाहिए कि भार से आशय उनके सापेक्ष (relative) महत्व से है जिसे भौतिक मापों के द्वारा व्यक्त किया जाता है। इन भारों को प्रदान करने की विधियाँ क्या हैं एवं किस आधार पर यह निर्णय लिया जाता है कि किस वस्तु का भार क्या हो ? यह एक विचारणीय प्रश्न है। इस विषय में कहा जाता है कि "तार्किक भार" (उचित भार) (rational weight) प्रदान किया जाना चाहिए।

यह तार्किक भार क्या है? इस पर विचार करके एवं इसके आशय को समझ लेने के बाद भारित सूचकांकों की संरचना एवं उनकों समझना आसान हो जाएगा। तार्किक भार का निर्णय सूचकांकों के उद्देश्य पर निर्भर करता है अर्थात् किस प्रयोजन के लिये सूचकांकों का निर्माण किया जा रहा है। उदाहरण के लिये

यदि किसानों की आय में परिवर्तन का अध्ययन करना है तो सूचकांकों में वस्तुओं की श्रेणी में सिर्फ कृषि उत्पादों को सम्मिलित किया जाएगा एवं उनके मूल्य संदर्भित किये जायेंगे। तत्पश्चात् कृषि उत्पादों से प्राप्त कुल मौद्रिक आय के अनुपात में भार का निर्धारण किया जाएगा। दूसरे उदाहरण में यदि जीवनलागत में परिवर्तनों का अध्ययन करना है तो उपभोक्ता वस्तुओं के फुटकर मूल्य संदर्भित किये जायेंगे एवं परिवारों द्वारा उन विभिन्न वस्तुओं पर किये गये अनुपातिक व्यय को भार के रूप में माना जाएगा।

भार दो प्रकार से प्रदान किये जाते हैं (i) प्रत्यक्ष रूप (direct) से एवं (ii) अप्रत्यक्ष रूप (indirect) से। प्रत्यक्ष विधि में भारों को सीधे–सीधे तार्किक आधार पर वस्तुओं को प्रदान किया जाता है। उदाहरण के लिये यदि चीनी एंव चाय को उनके उत्पादन के आधार पर भार प्रदान करना है तो उनके उत्पादन की मात्रा के अनुपात पर विचार करना पड़ेगा। यदि चीनी और चाय को उनके उत्पादन के आधार पर भार प्रदान करना है तो उनके उत्पादन की मात्रा के अनुपात पर विचार करना पड़ेगा। यदि चीनी और चाय के उत्पादनों का अनुपात 7:5 है तो चीनी को 7 एवं चाय को 5 भार स्वरूप प्रदान किया जाएगा। इस प्रकार भार प्रदान करने को "प्रत्यक्षरूप" से भार प्रदान करना कहते हैं। अप्रत्यक्ष विधि में वस्तुओं को प्रत्यक्ष रुप से भार को नहीं प्रदान किये जाते हैं पर वह वस्तुएं जिनका महत्व अधिक होता है, उनकी किस्मों को अलग वस्तु मान कर सूची में एक से अधिक बार लिख दिया जाता है। उदाहरण के लिये चावल की चार किस्में हैं, और चावल को भार स्वरूप 4 प्रदान करता है तो चावल को सूची में चार बार वर्णित किया जाएगा। इस विधि में भार प्रत्यक्ष रूप से नहीं दिखाई पड़ते पर वस्तुओं की बारम्बारता के कारण उनको भार प्राप्त हो जाता है। इसे अप्रत्यक्ष रूप से भार प्रदान करना कहते हैं।

2.3 भारित सूचकांकों की विशेषताएं (Features of Weighted Index Numbers)

उपरोक्त पंक्तियों का अध्ययन करने के उपरान्त भारित सूचकांकों की विशेषताओं को संक्षिप्त रूप से बिन्दुवार निम्न प्रकार से देखा जा सकता है:–

- भारित सूचकांक वस्तु के सापेक्ष महत्व को केन्द्र में रखते हैं।
- भार से तात्पर्य वजन से न होकर वस्तु के मूल्य (value) के अनुपात में महत्व से है।
- यदि भार को तार्किक आधार पर प्रदान किया गया है तो प्राप्त परिणाम शुद्ध होंगे।
- भारित सूचकांकों के द्वारा वस्तुओं के मूल्यों में एक समयावधि से दूसरी समयावधि में हुए सापेक्ष परिवर्तनों का वास्तविक रूप से अध्ययन किया जाता है।
- सूचकांक जिन प्रवृत्तियों की ओर इंगित करते हैं यदि वह भारित सूचकांकों के द्वारा सामने आई है तो ऐसी प्रवृत्तियाँ वास्तविकता के निकटतम होती है।
- जीवन निर्वाह सूचकांक, के निर्माण में अथवा विशिष्ट वर्ग के आय में हुए परिवर्तन का अध्ययन करने में अथवा व्यापार से हुई आय के परिवर्तन का अध्ययन करने में भारित सूचकांक की विधि ही प्रयोग में लायी जाती है।

2.4 भारित सूचकांकों की संरचना की विधियाँ (Methods of Construction of Weighted Index Numbers)

2.4.1 भारित समूही रीति (Weight Aggregative method)

भारित समूही रीति, साधारण समूही रीति, जिसका आप पूर्व की इकाई में अध्ययन कर चुके हैं, से मिलती हुई है। इसमें फर्क सिर्फ इतना है कि विभिन्न वस्तुओं को सापेक्षिक भार प्रदान किया जाता है तथा मूल्यों के साधारण समूही योग के स्थान पर मूल्यों के भारित समूही योग लिये जाते हैं। यह भार विभिन्न प्रकार से प्रदान किये जाते हैं तथा इनके योगों को विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की संरचना में प्रयोग किया जाता है।

इस विधि में यदि भार उपभोग की वास्तविक मात्रा के आधार पर होता है तो इसे 'q' के द्वारा प्रकट करते हैं, एवं यदि भार अनुमान के आधार होता है तो इसे 'w' द्वारा प्रकट करते हैं। भारों को भी q_0 (आधार वर्ष के भार) तथा q_1 (चालू वर्ष के भार) के रूप में प्रकट करते हैं। पिछली इकाई में आप P_0 (आधार वर्ष के मूल्य) तथा P_1 (चालू वर्ष के मूल्य) के प्रयोग द्वारा सूचकांकों की रचना की विधि का अध्ययन कर चुके हैं। इस विधि में P_0, P_1, q_0, q_1 के प्रयोग द्वारा ही भारित सूचकांकों की रचना करते हैं। भारित सूचकांकों को विशेषज्ञों द्वारा भिन्न–भिन्न रूप से रचित किया गया है जिसका हम क्रमशः अध्ययन करेंगे, जो निम्न प्रकार से हैः–

1.4.1.1 लास्पियरे की विधि (Laspeyre's Method)

यह विधि प्रोलास्पियरे द्वारा सन् 1871 में प्रतिपादित की गयी थी। यह विधि भारित समूही सूचकांक को प्रकट करती है। इस विधि में आधार वर्ष की मात्रा (q_0) द्वारा भार प्रदान किये जाते हैं। यह भार आधार वर्ष में उपभोग की गई वस्तु होती है, जो कि मूल्य सूचकांकों में सम्मिलित हुई रहती है। इस सूचकांक के निर्माण में निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$LaP_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

यह विधि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index) तैयार करने की एक लोकप्रिय विधि है। इस विधि के द्वारा आधार वर्श की तुलना में वर्तमान वर्श में वस्तुओं की निष्चित मात्रा क्रय करने की लागत में परिवर्तन का ज्ञान प्राप्त हो जाता है इस विधि में यह मान कर गणना की जाती है कि आधार वर्श में वस्तुओं की जो मात्रा थी वही वर्तमान वर्श में रही होगी। एक ही आधार वर्श की मात्रा एवं मूल्यों पर आधारित होने के कारण, एक अवधि के सूचकांक की दूसरे अवधि के सूचकांक से आसानी से तुलना की जा सकती है।

उदाहरण–

निम्न आँकड़ों से लास्पियरे की रीति द्वारा मूल्य–सूचकांक की रचना कीजिए।

From the following data construct Index Number by Laspeyre's method.

Article वस्तु	Base Year आधार वर्ष		Current Year चालू वर्ष	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

हल Solution

Article वस्तु	p_o	q_o	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	2	8	4	6	32	16	24	12
B	5	10	6	5	60	50	30	25
C	4	14	5	10	70	56	50	40
D	2	19	2	13	38	38	26	26
					200	**160**	**130**	**103**

Laspeyre's Index Number = $\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{200}{160} \times 100 = 125$

लास्पियरे की विधि, व्यापक रूप से प्रयोग की जाती है। इस विधि का लाभ यह है कि प्रत्येक बार सूचकांक बनाते समय भार की गणना नहीं करनी पड़ती है। परन्तु भार की गणना स्थिर रहने के कारण कठिनाई तब आती है जब मूल्यों के घटने अथवा बढ़ने के कारण उपभोग की मात्रा में परिवर्तन हो जाता है। भार स्थिर रहने के कारण इस विधि की पूर्णता प्राभावित होती है।

1.4.1.2 पाशे की विधि (Pasche's Method)

जर्मनी के सांख्यिकीविद् 'पाषे' के द्वारा प्रतिपादित विधि में आधार वर्ष के भारों के स्थान पर वर्तमान वर्ष के भारों का प्रयोग किया जाता है। यह विधि भी लास्पियरे की विधि की तरह ही है, बस इसमें इतना ही अन्तर है कि आधार वर्श के भार के स्थान पर चालू वर्श के भारों में प्रयोग किया जाता है। इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:–

$$Pa\ P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

पाशे की विधि इस मान्यता पर आधारित है कि व्यक्ति वस्तुओं की जो मात्रा वर्तमान में उपभोग (क्रय) कर रहा है वही आधार वर्ष में भी उपभोग (क्रय) कर चुका है।

उदाहरण : निम्न समकों से वर्ष 2008 के लिये पाशें की रीति से मूल्य सूचकांक की रचना कीजिए।

Construct the price index number for the year 2008 from the following data using Pashche's method:-

Commodities वस्तु	**2003 आधार वर्ष**		**2008 वर्तमान वर्ष**	
	Price मूल्य	**Quantity मात्रा**	**Price मूल्य**	**Quantity मात्रा**
A	5	15	6	25
B	4	8	5	12
C	3	10	3	15
D	2	5	3	10

हल : (Solution)

Commodities वस्तु	Base year आधार वर्ष		Current year वर्तमान वर्ष			
	p_0	q_0	p_1	q_1	$p_0\,q_1$	$p_1\,q_1$
A	5	15	6	25	125	150
B	4	8	5	12	48	60
C	3	10	3	15	45	45
D	2	5	3	10	20	30

$Óp_0\,q_{1=238}$ $p_1q_{1=285}$

$$Pa\ P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$
$$= \frac{285}{238} \times 100 = 119.75$$

1.4.1.3 डारबिश– बाउले की विधि (Dorbish Bowley's Method)

यह विधि लास्पियरे एवं पाषे की विधि की एक संयुक्त विधि है। डारविश बाउले की विधि में लास्पियरें एवं पाषे की विधि से संरचित सूचकांकों का समान्तर माध्य ले लिया जाता है और सूचकांक को प्राप्त कर लिया जाता है। इसे निम्न सूत्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है:–

$$P_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1}\right] \times 100$$

उदाहरणः—

From the following data, construct index number by Bowley's method.

निम्न आँकड़ों से बाउले की रीति के द्वारा मूल्य सूचकांक की रचना कीजिये :

Article वस्तु	Base Year आधार वर्ष		Current Year चालू वर्ष	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	15	14	18	10
B	16	18	19	15
C	19	35	25	20
D	24	39	29	30
E	21	40	25	35
F	16	31	18	25

Solution हल

Article	p_o	q_o	p_1	q_1	p_1q_o	p_0q_o	p_1q_1	p_0q_1	q^*	p_1q	p_0q
A	15	14	18	10	252	210	180	150	12	216	180
B	16	18	19	15	342	288	285	240	16.5	313.5	264
C	19	35	25	20	875	665	500	380	27.5	687.5	522.5
D	24	39	29	30	1131	936	870	720	34.5	1000.5	828
E	21	40	25	35	1000	840	875	735	37.5	937.5	787.5
F	16	31	18	25	558	496	450	400	28	504	448
					4158	**3435**	**3160**	**2625**		**3659**	**3030**

$$q^* = \frac{q_0 q_1}{2}$$

Bowley's Method:

1.4.1.4 फिशर की विधि (Fisher's method)

फिशर की विधि लास्पियरे तथा पाशे की विधि का गुणोत्तर माध्य है। इसके माध्यम से सूचकांक की गणना के दाषों को दूर करने का प्रयास किया गया है। इसके द्वारा दिया गया सूत्र निम्न हैः—

$$F\ P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma\, p_0 q_1}} \times 100$$

यह सूत्र गुणोत्तर माध्य पर आधारित है जिसे सूचकांकों के लिये प्रयुक्त माध्यों में श्रेष्ठ कहा जाता है। वर्तमान वर्ष एवं आधार वर्ष के मूल्यों को इसमें शामिल कर के उक्त दोनों विधियों के दाषों को दूर करने का प्रयास किया गया है। फिशर ने लगभग एक सौ सूत्रों का परीक्षण करने के बाद इस सूत्र की रचना की थी, उन्होंने इसे आदर्श (Ideal) सूत्र कहा था।

$$Index\ No. = \frac{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} + \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}{2} \times 100$$

$$\frac{\frac{4158}{3435} \times \frac{3160}{2625}}{2} \times 100 = \frac{1.210 + 1.204}{2} \times 100 = 120.7$$

उदाहरणः—

निम्नलिखित समकों की सहायता से 2000 के आधार पर 2005 के लिए एक उपयुक्त सूचकांक ज्ञात करिये।

Compute a suitable index number for 2005 on the base year 2000 with the help of following data.

Commodity

वस्तु Commodity	2000		2005	
	मूल्य Price	मात्रा Quantity	मूल्य Price	मात्रा Quantity
A	12	100	20	120
B	4	200	4	240
C	8	120	12	150
D	20	60	24	50

हल Solution

वस्तु Commodity	p_o	q_o	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	12	100	20	120	2000	1200	2400	1440
B	4	200	4	240	800	800	960	960
C	8	120	12	150	1440	960	1800	1200
D	20	60	24	50	1440	1200	1200	1000
					5680	**4160**	**6360**	**4600**

फिशर का आदर्श सूचकांक Fisher's Ideal Index Number

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{5680}{4160} \times \frac{6360}{4600}} \times 100$$

$$= 1.374 \times 100$$

$$= 137.4$$

1.4.1.5 मार्शल की विधि (Marshal's Method)

इस विधि में आधार वर्ष एवं चालू वर्ष दोनों की मात्राओं के औसत का भार दिया जाता है। इसे निम्न सूत्र द्वारा प्रकट किया जाता है:–

$$M\ P_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0 + \Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0 + \Sigma p_0q_1}\right] \times 100$$

उदाहरण:– निम्न समंकों से वर्श 2010 के लिये मार्षल की विधि से सूचकांक की रचना करिये।

Construct index number from the following data according to Marshal's Method

Commodities वस्तु	Base Year - 2009 आधार वर्ष		Current Year 2010 वर्तमान वर्ष	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	5	15	6	25
B	4	8	5	12
C	3	10	3	15
D	2	5	3	10

हल : (Solution)

Commodities वस्तु	Base year आधार वर्ष		Current year वर्तमान वर्ष					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_0	p_0q_1
A	5	15	6	25	90	150	75	125
B	4	8	5	12	40	60	32	48
C	3	10	3	15	30	45	30	45
D	2	5	3	10	15	30	10	20
					Óp$_1$q$_{0=}$ 175	Óp$_1$q$_{1=}$ 285	Óp$_0$q$_{0=}$ 149	Óp$_0$ q$_{1=}$ 238

$$M\ P_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma p_1q_0 + \Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0 + \Sigma p_0q_1}\right] \times 100$$

$$= \left[\frac{175+285}{149+238}\right] \times 100$$

$$= \frac{462}{384} \times 100$$

$$= 119.3$$

इस विधि को मार्शल एजवर्थ की विधि भी कहते हैं।

1.4.1.6 केली की विधि (Kelly's Method)

केली की विधि में मूल्यों के समूहों के अनुपात के साथ आवश्यकतानुसार भारों को लिया जाता है। यहाँ यह स्पष्ट किया जा रहा है कि भार को आधार वर्ष या वर्तमान वर्ष में सीमित न करके किसी भी उचित वर्ष से लिया जाता हैं। इसे निम्न सूत्र द्वारा प्रकट करते हैं:—

$$K\ P_{01} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100$$

इस सूत्र में q से आशय है उस भार से, जो आवश्यकतानुसार ले लिया जाता है। यह सूचकांक गणना एवं प्रयोग की दृष्टि से सर्वाधिक प्रयोग किया जाने वाला सूचकांक है। यदि भारों को उचित रूप से लिया जाता है तो आधार वर्ष अथवा वर्तमान वर्ष के भारों को न लिये जाने का दोष नहीं रहेगा।

उदाहरणः—

From the following data, construct index number by Kelly's method.

निम्न आँकड़ों से केली की रीति द्वारा मूल्य सूचकांक की रचना कीजिये :

Article वस्तु	Base Year आधार वर्ष		Current Year चालू वर्ष	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	15	14	18	10
B	16	18	19	15
C	19	35	25	20
D	24	39	29	30
E	21	40	25	35
F	16	31	18	25

Solution हल

Article	p_o	q_o	p_1	q_1	p_1q_o	p_0q_o	p_1q_1	p_0q_1	q^*	p_1q	p_0q
A	15	14	18	10	252	210	180	150	12	216	180
B	16	18	19	15	342	288	285	240	16.5	313.5	264
C	19	35	25	20	875	665	500	380	27.5	687.5	522.5
D	24	39	29	30	1131	936	870	720	34.5	1000.5	828
E	21	40	25	35	1000	840	875	735	37.5	937.5	787.5
F	16	31	18	25	558	496	450	400	28	504	448
					4158	**3435**	**3160**	**2625**		**3659**	**3030**

$$q^* = \frac{q_0 + q_1}{2}$$

Kelly's Method:

$$\text{Index No.} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100 = \frac{3659}{3030} \times 100 = 120.76$$

2.4.2. भारित माध्य मूल्य अनुपात विधि (Weighted Average of Price Relatives Method)

इस विधि में सूचकांक की रचना करते समय प्रत्येक वस्तु का आधार वर्ष के मूल्य के आधार पर चालू वर्ष के लिये मूल्य अनुपात निकाल लेते हैं इसकी गणना निम्न प्रकार से की जाती है —

$$p_{01} = \frac{\sum RW}{\sum W.}$$

उदाहरण :—

निम्न समकों से मूल्यानुपातों का भारित माध्य लेकर सूचकांक की रचना करिये।

Construct weighted average of price relative index number from the following dates

वस्तु Commodity	मूल्य की इकाई Unit of Price	आधार वर्ष का मात्रा Quantity of Base year	आधार वर्ष का मूल्य Price of Base year Rs.	चालू वर्ष का मूल्य Price of Correct year Rs.
गेहूँ–Wheat	प्रति कुण्टल Per Quintal	8 कुण्टल	100	150
चीनी–Sugar	प्रति किग्रा0 Per Kg.	100 किग्रा0	3	5
दूध–Milk	प्रति लीटर Per Leter	80 लीटर	3	6
कपड़ा–Clothing	प्रति मीटर Per Meter	40 मीटर	5	8
घर–House	घर House	1	25	40

हल Solution

वस्तु Commodity	इकाई Unit	q_o	p_o	p_1	p_0q_o (W)	मूल्यानुपात R.	RW
गेहूँWheat	प्रति कुण्टल Per Quintal	8 कुण्टल	100	150	800	150	120000
चीनीSugar	प्रति किग्रा0. Per Kg	100 किग्रा0	3	5	300	167	50100
दूधMilk	प्रति लीटर Per Leter	80 लीटर	3	6	240	200	48000
कपड़ाClothing	प्रति मीटर Per Meter	40 मीटर	5	8	200	160	32000
घरHouse	1घर House	1	25	40	40	160	6400
					ΣW= 1580		ΣRW= 256500

Index Number-सूचकांक

$$= \frac{\Sigma RW}{\Sigma W}$$

$$= \frac{256500}{1580} = 162.34$$

भारित मूल्यानुपात विधि के द्वारा बनाया जाने वाला उपभोक्ता मूल्य सूचकांक अथवा जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index or Consumer Price Index) सबसे लोकप्रिय एवं प्रचलित सूचकांक है।

1.4.2.1 जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index)

आपने अब तक जिन सूचकांको को अध्ययन किया है उनसे आपकों यह जानकारी प्राप्त हुई है कि मूल्यों के स्तर में परिवर्तन की प्रकृति एवं दिशा क्या है। परन्तु आपको यह नही ज्ञात हो पाता है कि मूल्य (कीमत) स्तर के परिवर्तन का समाज पर क्या प्रभाव पड़ता है। जीवन निर्वाह सूचकांक मूल्यों (कीमतों) के परिवर्तनों का उपभोक्ताओं पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन करता है। जीवन निर्वाह सूचकांक के माध्यम से यह जानने का प्रयास किया जाता है कि उपभोक्ताओं के एक विशेष वर्ग ने एक निष्चित समय बिन्दु पर वस्तुओं के एक समूह (टोकरी) के लिये आधार वर्ष की तुलना में क्या कीमत चुकाई है। "यह सूचकांक किसी स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्तियों के निर्वाह व्यय में होने वाले परिवर्तनों की दिशा और मात्रा को प्रकट करते हैं।" जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index) को, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index), फुटकर मूल्य सूचकांक (Retail Price Index) आदि नाम से भी जाना जाता है।

यह हम सभी जानते हैं कि जब वस्तुओं का मूल्य (कीमत) बढ़ता है तो जीवन निर्वाह व्यय बढ़ जाता है और जब वस्तुओं का मूल्य (कीमत) घटता है तो जीवन निर्वाह व्यय घट जाता है। इस जीवन निर्वाह व्यय के घटना–बढ़ना से सभी वर्ग समान रूप से प्रभावी नहीं होते हैं। किसी वर्ग के लिये इस घटने–बढ़ने का प्रभाव कम होता है तो किसी वर्ग के लिये अधिक। इसका कारण यह है कि विभिन्न व्यक्ति भिन्न–भिन्न प्रकार से वस्तुओं का उपभोग करते हैं

और सभी वस्तुओं के मूल्य (कीमत) समान रूप से बढ़ते–घटते भी नहीं हैं। विभिन्न वर्गों पर मूल्य (कीमत) परिवर्तन के प्रभाव को ज्ञात करने के लिये जीवन निर्वाह सूचकांक (उपभोक्ता मूल्य सूचकांक) की रचना की जाती है। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक यह बताता है कि एक विषिश्ट वर्ग के उपभोक्ता को वस्तुओं के एक समूह (टोकरी) के लिए आधार वर्ष की तुलना में वर्तमान समय के एक निश्चित बिन्दु पर क्या व्यय करना पड़ रहा है।

जीवन निर्वाह सूचकांकों की उपयोगिता :–

- वर्ग विशेष के व्यक्तियों के रहन–सहन के व्यय में उतार चढ़ाव की मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है।
- रूपये की क्रयशक्ति की जानकारी प्राप्त होती है।
- महँगाई भत्ते (D.A.) का निर्धारण इसी के आधार पर बहुधा किया जाता है।
- मूल्यों पर नियंत्रण के लिये प्रभावी निर्णय लिये जा सकते हैं।

जीवन निर्वाह सूचकांकों की मान्यताएं

- यह मानकर सूचकांकों का निर्माण किया जाता है कि जिस वर्ग के लिए सूचकांक बनाया जा रहा है उसके उपभोग की प्रवृत्ति समान है। ऐसा यदि न माना जाय तो प्रत्येक उपभोक्ता के लिये अलग–अलग सूचकांक तैयार करना होगा।
- यह भी एक मान्यता लेकर चला जाता है कि वर्तमान वर्ष एवं आधार वर्ष के लिये उपभोग की वस्तुएं वहीं थीं
- मात्रा के भी एक समान होने की मान्यता होती है।
- यदि सूचकांक विभिन्न स्थानों के लिए बनाया जा रहा है तो सभी स्थानों पर मूल्य समान होंगे।

- यह भी मान्यता है कि वस्तुएं जो सम्मिलित की जा रही हैं वह वर्ग विशेष के उपभोग का उचित प्रतिनिधित्व करती हैं।

जीवन निर्वाह सूचकांकों की रचना में कठिनाइयाँ :–

- सबसे बड़ी असुविधा यह होती है कि इनकी रचना करने में फुटकर मूल्यों का प्रयोग होता है और फुटकर मूल्यों में स्थान–स्थान पर असमानता रहती है।
- समाज के सभी उपभोक्ताओं का विभिन्न वस्तुओं पर व्यय का अनुपात समान नहीं होता है चाहे वर्ग कितना भी छोटा क्यों न हो।
- विभिन्न उपभोक्ताओं का जीवन स्तर उनकी आय, स्थान, शिक्षा एवं परिवेश के आधार पर भिन्न रहता है इसलिए जीवन निर्वाह सूचकांक सभी वर्गों एवं सभी स्थानों के लिये एक साथ समग्र रुप से नहीं बनाया जा सकता है।
- एक ही वर्ग के सभी व्यक्ति एक ही समय में एक ही ढंग से व्यय नहीं करते। परिस्थितियाँ, समय, रूचि एवं आदत इसे प्रभावित करती हैं।

जीवन निर्वाह सूचकांक की संरचना Construction of Cost of Living Index)

जीवन निर्वाह सूचकांक अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना करने की दो प्रमुख विधियाँ हैं–

2.4.2.1.1 समूही व्यय रीति (Aggregative Expenditure Method)

इस विधि के अन्तर्गत निम्न चरणों का अनुसरण करके जीवन निर्वाह सूचकांक अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना की जाती है–

(i) प्रथम चरण के रूप में p_1q_0 अर्थात् वर्तमान वर्ष के मूल्य एवं आधार वर्ष की मात्रा का गुणनफल एवं उनका कुल योग– Σp_1q_0

(ii) द्वितीय चरण में p_0q_0 अर्थात आधार वर्श के मूल्य एवं मात्रा का गुणनफल एवं उनका कुलयोग– Σp_0q_0

(iii) तष्तीय चरण में वर्तमान वर्ष के गुणनफलों के योग में आधार वर्ष के गुणनफलों के योग का भाग देते हैं–

(iv) प्राप्त मान को 100 से गुणा करते हैं–

उदाहरण :–

निम्न सूचनाओं से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की संरचना वर्ष 1996 एवं वर्ष 1997 के लिये, 1995 को आधार मानते हुए समूही व्यय रीति से करिये।

From the following information construct consumer price index number for 1996 and 1997 on the base of 1995 by aggregate expenditure method.

वस्तु Article	उपभोग Consumption 1995	मूल्य की इकाई Unit of Price	मूल्य Price-1995	मूल्य Price 1996	मूल्य Price 1997
गेहूँ Wheat	2 कुण्टल Qtls	कुण्टल Qtls	50	75	125
चावलRice	25 किग्रा0 Kg.	कुण्टल Qtls	100	120	160
दालें Pulses	10 किग्रा0Kg.	कुण्टल Qtls	80	120	160
घी Ghee	10 किग्रा0 Kg	किग्रा0.Kg	6.50	7.80	9.75
तेल Oil	0.25 कुण्टलQtls	किग्रा0 Kg.	2	3	5
कपड़ाClothing	50 मीटरMeters	मीटर Meters	2	2.25	2.50
इंधन Fuel	4 कुण्टल Qtls	कुण्टल Quintals	8	10	12
किरायाRent	1 घर House	घर House	20	25	40

हल Solution

वस्तु Article	मात्रा Quantity 1995 q_0	मूल्य Price 1995 p_0	p_oq_o	For 1996 मूल्य Price p_1	p_1q_o	For 1997 मूल्य Price p_1	p_1q_o
गेहूँWheat	2.00	50.00	100.00	75.00	150.00	125.00	250.00
चावलRice	0.25	10.00	25.00	120.00	30.00	100.00	40.00
दालेंPulses	0.10	80.00	8.00	120.00	12.00	160.00	16.00
घीGhee	10.00	6.50	65.00	7.80	78.00	9.75	97.50
तेलOil	25.00	2.00	50.00	3.00	75.00	5.00	125.00
कपड़ाClothing	50.00	2.00	100.00	2.25	112.50	2.50	125.00
इंधनFuel	4.00	8.00	32.00	10.00	40.00	12.00	48.00
किरायाRent	1.00	20.00	20.00	25.00	25.00	40.00	40.00
			400		522.50		741.5

समूही व्ययरीति द्वारा सूचकांक $= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times 100$

Index Number of Aggregate expenditure method

1996 के लिये सूचकांक $= \frac{522.50}{400.00}\times 100 = 130.6$
Index Number for 1996

1997 के लिये सूचकांकIndex Number for 1997 $= \frac{741.50}{400.00}\times 100 = 185.4$

2.4.2.1.2 पारिवारिक बजट रीति (Family Budget Method)

इस रीति के द्वारा निम्न चरणों का पालन किया जाता है–

(i) प्रत्येक वस्तु का मूल्यानुपात– $\frac{P_1}{P_0}\times 100$ निकाला जाता है जिसे R द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(ii) प्रत्येक मूल्यानुपात में आधार वर्ष के भारित मूल्य p_0q_0, जिसे **w** द्वारा प्रदर्शित करते हैं, से गुण करते हैं।

(iii) इन गुणनफलों का योग करके ΣRW ज्ञात करतें हैं।

(iv) ΣRW में भारों को कुलयोग ΣW से भाग दिया जाता है–

$$P_{01} = \frac{\sum RW}{\sum W}$$

उदाहरणः—

निम्न समकों से वर्श 2000 को आधार मान कर वर्ष 2010 के लिये पारिवारिक बजट रीति द्वारा जीवन निर्वाह सूचकांक (उपभोक्ता मूल्य सूचकांक) की रचना करिये।

Construct Cost of living Index (Consumer Price Index) by family budget method for the year 2010 taking the year 2000 as base.

वस्तु Commodity	मात्रा Quantity 1995	मूल्य की इकाई Unit of Price	मूल्य Price 2000	मूल्य Price 2010
गेहूँWheat	2 कुण्टल Quintals	कुण्टल Quintals	50	75
चावलRicer	25 किग्रा0 Kg.	कुण्टल Quintals	100	120
चीनीSugar	10 किग्रा0 Kg.	कुण्टल Quintals	80	120
घीGhee	05 किग्रा0 Kg.	किग्रा0Kg.	10	10
वनस्पतिVanaspati	05 किग्रा0 Kg.	किग्रा0 Kg.	3	5
तेलOil	25 कुण्टल Quintals	कुण्टल Quintals	200	200
कपड़ाClothing	25 मीटरMeters	मीटरMeters	4	5
इंधनFuel	4 कुण्टल Quintals	कुण्टल Quintals	8	10
कियायाRent	1 घर House	घर House	20	25

हल Solution

वस्तु Commodity	मूल्य Unit	मात्रा Quantity	मूल्य Price					
		q_0	p_0	p_1	p_0q_0 (W)	p_1q_0	R	RW
गेहूँ Wheat	कुण्टल Quintals	2 कुण्टल Quintals	50	75	100	150	150.0	15000
चावल Ricer	कुण्टल Quintals	.25 कुण्टल Quintals	100	120	25	30	120.0	3000
चीनी Sugar	कुण्टल Quintals	.10कुण्टल Quintals	80	120	8	12	150.0	1200
घी Ghee	किग्रा0. Kg	5 किग्रा0 . Kg	10	10	50	50	100.0	5000
वनस्पति Pulses	किग्रा0. Kg	5 किग्रा0 . Kg	3	5	15	25	167.6	2500
तेल Oil	कुण्टल Quintals	.25कुण्टल Quintals	200	200	50	50	100.0	5000
कपड़ा Clothing	मीटर Meters	25 मीटर Meters	4	5	100	125	125.0	12500
इंधन Fuel	कुण्टल Quintals	4 कुण्टल Quintals	8	10	32	40	125.0	4000
किराया Rent	घर House	1 घर House	20	25	20	25	125.0	2500
					400	**507**		**50700**

जीवन निर्वाह सूचकांकCost Living Index $= \frac{\sum RW}{\sum W}$

$$= \frac{50700}{400} = 126.75$$

2.5 सूचकांको का शिरोबन्धन (Splicing of Index Numbers)

कभी—कभी ऐसी परिस्थिति उत्पन्न हो जाती है कि सूचकांक के आधार अवधि को किसी समसामयिक अवधि से स्थानापन्न किया जाय। ऐसा तब होता है जब कि सूचकांक में समाहित वस्तुओं में से

कुछ वस्तुओं के स्थान पर दूसरी वस्तुएं स्थापित की जाएं अथवा ऐसी आवश्यकता उत्पन्न हो जाए। इन परिस्थितियों में वस्तुओं के साथ–साथ उनके सापेक्षिक मूल्य भी परिवर्तित हो जाएगें। कभी–कभी भार पुराने एवं अप्रयोज्य हो जाते हैं और नये भारों को प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। इन सभी परिस्थितियों में सूचकांक अपनी निरन्तरता खो देते हैं। हमारे पास कुछ समय के लिए दो सूचकांक हो जाते हैं, एक तो मूल आधार वर्ष का और दूसरा, नये आधार वर्ष का। ऐसी स्थित में सूचकांकों की निरन्तरता को बनाए रखने के लिए दोनों सूचकांकों को आपस में बांधना अथवा जोड़ना (connect) पड़ता है। इसी जोड़ने को षिरोबन्धन (splicing) कहते हैं। हम कह सकते हैं कि देा (या दो से अधिक) सूचकांको की श्रेणियों के परस्पर व्यापन (overlapping) को एक सामान्य आधार पर एक सूचकांक श्रेणी में परिवर्तित करने की क्रिया ही षिरोबन्धन होती है।

शिरोबन्धन दो प्रकार से होता है, जब–

(i) नये सूचकांक को पुरानें सूचकांक से जोड़ा जाता है। इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैंः–

षिरोबन्धित सूचकांक=

$$\frac{\text{वर्तमान वर्ष का नया सूचकांक} \times \text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}}{100}$$

$$\text{SplicedIndexNumber} = \frac{\text{NewIndexNumberofCurrentBasePeriod} \times \text{OldIndexNumberofnewBasePeriod}}{100}$$

(ii) पुराने सूचकांक को नये सूचकांक से जोड़ा जाता है, तब इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\text{शिरोबन्धित सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का सूचकांक}}{\text{नये आधार वर्ष का पुराना सूचकांक}} \times 100$$

2.6 सूचकांको का संकुचन (Deflating of Index Numbers)

हम जानते हैं कि वस्तुओं एवं सेवाओं के मूल्यों के बढ़नें के साथ–साथ मुद्रा की क्रय शक्ति घटती जाती है। हम कह सकते हैं कि सूचकांकों के बढ़नें के अनुपातिक रूप में वास्तविक आय घटेगी। अर्थात् मौद्रिक आय और वास्तविक आय में अन्तर रहेगा। मौद्रिक आय को उस सीमा तक घटाकर, जहाँ तक मूल्य वृद्धि हुई है, वास्तविक आय का आंकलन किया जा सकता है। दूसरे षब्दों में वास्तविक आय का आंकलन करने के लिए मौद्रिक आय को संषोधित करना पड़ता है। इसे ही सूचकांकों की अपस्फीर्ति अथवा संकुचन कहते हैं। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैंः–

$$\text{वास्तविक आय} = \frac{\text{मौद्रिक आय}}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{Real Income} = \frac{\text{Money Income}}{\text{Price Index}} \times 100$$

$$\text{वास्तविक आय सूचकांक} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष की वास्तविक आय}}{\text{आधार वर्ष की वास्तविक आय}} \times 100$$

$$\text{Real Income Index Number} = \frac{\text{Current year's Real Income}}{\text{Base year's Real Income}} \times 100$$

2.7 उत्क्राम्यता परीक्षण (Reversibility Test)

उत्क्राम्यता परीक्षण से सूचकांकों की विश्वसनीयता एवं शुद्धता का परीक्षण किया जाता है। इसके अन्तर्गत विभिन्न प्रकार के अनुपातों का प्रयोग कर के सूचकाकों को विभिन्न दृष्टिकोणों से देखा जाता है। यह निम्न प्रकार से किया जाता हैः–

2.7.1 समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)

इसके अन्तर्गत यदि आधार वर्ष के आधार पर वर्तमान वर्ष का सूचकांक ज्ञात किया जाये, एवं वर्तमान वर्ष के आधार पर आधार वर्ष

का सूचकांक ज्ञात किया जाए तो दोनों सूचकांक एक दूसरे व्युतक्रम होंगे। इसे निम्न सूत्र से रूप समझा जाता है :–

$$P_{0_1} = \frac{1}{P_{1_0}} \quad \text{अथवा} \quad P_{0_1} \times P_{1_0} = 1$$

आपको यहाँ पर पुनः एक बार फिषर के सूचकांक ज्ञात करने के सूत्र को स्मरण करता होगा और उसमें उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करके देखना होगा। आपको यह ज्ञात होगा कि फिषर का सूत्र इस मापदण्ड पर खरा उतरता है।

फिशर का वर्तमान वर्ष का सूचकांक= $P_{0_1}\sqrt{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$

फिशर का आधार वर्ष का सूचकांक= $P_{1_0}\sqrt{\frac{\Sigma P_0q_0}{\Sigma p_1q_0} \times \frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}$

$$P_{0_1} \times P_{1_0}\sqrt{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times \frac{\Sigma P_0q_0}{\Sigma p_1q_0} \times \frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}} = 1$$

यह भी एक कारण है कि फिशर के सूचकांक को आदर्ष सूचकांक कहा जाता है।

2.7.2 तत्त्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण यह बतलाता है कि मूल्य के स्थान पर मात्रा एंव मात्रा के स्थान पर मूल्य रखकर सूचकांक (मात्रा सूचकांक Q_{0_1}) की रचना की जाए तो मात्रा सूचकांक और मूल्य सूचकांक का गुणनफलन चालू वर्ष के कुल मूल्य और आधार वर्ष के कुल मूल्य के अनुपात के बराबर होना चाहिए।

यदि फिशर के सूत्र का परीक्षण इस सूत्र से किया जाए तो फिशर का सूचकांक इस पर भी खरा उतरता है–

$$FP_{1_0} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$$

$$FQ_{1_0} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

$$FP_{1_0} \times FQ_{0_1} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times \frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

$$= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

2.7.3 चक्रीय परीक्षण (Circular Test)

चक्रीय परीक्षण यह बताता है कि यदि 'O' आधार वर्श पर वर्श '1' के लिए एक सूचकांक बनाया जाएं। तत्पष्चात दूसरा सूचकांक '1' को आधार वर्श मान कर वर्श '2' के लिए बनाया जाए। पुनः यदि तीसरा सूचकांक '2' को आधार वर्श मानकर वर्श '3' के लिए सूचकांक बनाया जाए और यदि यही क्रम........(n-1)n तक जारी रखा जाए तो इन सभी सूचकांकों का गुणनफल 1 आना चाहिए।

जैसे– $P_{01} \times P_{1_2} \times P_{2_3} \times P_{3_4} \ldots\ldots P_{(n-1)n} = 1$

1.8 सारांश (Summary)

सूचकांक आर्थिक सपंदनों के मापन एक सुस्पष्ट एवं व्यापक रूप से स्वीकृत माध्यम है। सूचकांक एक विशिष्ट माध्य होते हैं। जिनके द्वारा मूल्यों में परिवर्तिनों का सापेक्ष रूप से अध्ययन किया जाता है। सूचकांक आर्थिक जगत के परिवर्तनों का मापन एक निश्चित समयान्ताल पर करते हैं जिसके द्वारा सभी वर्गों को उनके आर्थिक व्यवहार में दिषा निर्देषन प्राप्त होता है। कुछ ऐसे परिवर्तन होते हैं जो प्रत्यक्ष रूप से तुलनीय नहीं होते है, उन्हें केवल सूचकांकों के द्वारा मापित किया जा सकता है। जो परिणाम हमें

इनके द्वारा प्राप्त होते हैं वह तभी षुद्ध हो सकते हैं जब उनका विश्लेषण तर्कपूर्ण एवं वैज्ञानिक हो।

अभारित सूचकांक, वस्तुओं के महत्व (भार) को समान मानते हुए उनके परिवर्तनों का अध्ययन करता है। हम सभी यह जानते हैं कि सभी वस्तुएं एक समान महत्व की नहीं होती है, अतः एक ही कसौटी पर उनका परीक्षण उचित नहीं है।

चूँकि सूचकांक में सम्मिलित वस्तुएं भिन्न भिन्न एवं विविध होती है इसलिए उनको भार (महत्व) अवष्य प्रदान किया जाना चाहिए। भार कोई साधारण वजन नहीं है। भार से आशय वस्तुओं के सापेक्ष महत्व से है। भारों को तार्किक रूप से अर्थात् उनके उद्देश्य को ध्यानस्थ करते हुए प्रदान किये जाने चाहिए। जैसे किसानों की आय में परिवर्तन के अध्ययन में कृषि उत्पादों का शामिल किया जाना। भार प्रदान करते समय वस्तुओं के उत्पादन के अनुपात का ध्यान अवश्य रखा जाता है।

भारित सूचकांकों की रचना करने की दो विधियाँ हैं (i) भारित समूही रीति जिसके अन्तर्गत लास्पियरे, पाशे,, डारविश बाउले, फिशर एवं केली की विधियों को आपको स्पष्ट किया गया है। (ii) भारित माध्य मूल्य अनुपात विधि के अन्तर्गत आपको जीवन निर्वाह सूचकांक के विषय में विस्तार से स्पष्ट किया गया है। जीवन निर्वाह अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक को दो विधियों से निर्मित किया जाता है–समूही व्यय रीति एवं पारिवारिक बजट रीति द्वारा।

सूचकांकों के शिरोबन्धन से आषय होता है कि पुराने आधार वर्ष को परिवर्तित करने के उपरान्त नये आधार वर्ष को लेकर बनाए गये सूचकांक को पुराने सूचकांक से जोड़ना।

सूचकांकों की अपस्फीति अथवा संकुचन के द्वारा वास्तविक आय का अनुमान लगाया जाता है कि किसी विशेष वर्श की तुलना में वर्तमान समय में मुद्रा का मूल्य क्या है। इसके द्वारा मूल्य स्तरों में परिवर्तन का अवसर प्राप्त होता है।

सूचकांक कैसे है, उनकी शुद्धता और विश्वसनीयता का परीक्षण उत्क्राम्यता के मापदण्डों द्वारा किया जाता है। समय उत्क्राम्यता, तत्व उत्क्राम्यता एवं चक्रीय परीक्षण आदि परीक्षण है जो सूचकांकों की शुद्धता विश्वसनीयता एवं उत्तमता को परिभाषित करते हैं।

1.9 शब्दावली (Terminology)

भार (**Weight**)–सूचकांकों में सम्मिलित वस्तुओं का सापेक्षिक महत्व, न कि वजन

भारित समूह (Weighted Aggregatives)–मूल्यों के भारित समूह का योग

भारित माध्य मूल्य अनुपात (Weighted Price Relative Average)

आधार वर्ष के मूल्य के आधार पर वर्तमान वर्ष के लिये मूल्य अनुपात **जीवन निर्वाह सूचकांक (उपभोक्ता मूल्य सूचकांक) (Cost of Living/ Consumer Price Index)** स्थान विशेष पर वर्ग विशेष के व्यक्तियों के निर्वाह व्यय में होनें वाले परिवर्तन का माप

शिरोबन्धन (Splicing)–अलग–अलग आधार वर्ष को लेकर बनाए गये सूचकांकों को जोड़ना (Correct)।

संकुचन (Deflating)–वास्तविक आय का अनुमान किसी समय विशेष पर करना।

1.10 स्वअभ्यास प्रश्न (Self Exercise Qustions)

1. निम्न समकों से भारित समूही रीति द्वारा वर्ष 1995 को आधार मान कर वर्ष 2000 के लिये मूल्य सूचकांक की रचना करिये।

From the following data prepare a price index number for the year 2000 taking the year 1995 as base by aggregative expenditure method.

वस्तु Commodity	उपभोग की मात्रा Quantity-1995	मूल्य Price-1995	मूल्य Price-2000
A	20	8.00	10.00
B	12	20.00	30.00
C	3	0.25	0.25
D	10	2.56	3.12
E	5	1.00	0.75

Index Number for the year 2000 = 138.10

2. Calculate the index number of prices for 1998 on the basis of 1990 from the data given below:

नीचे दिये गये आंकड़े से 1990 को आधार मानकर 1998 के लिये सूचकांक ज्ञात कीजिये–

Commodity वस्तु	Weight भार	1990 Price (Rs.) 1990 मूल्य (रु0)	1998 Price (Rs.) 1998 मूल्य (रु0)
A	40	16	20
B	25	40	60
C	5	0.50	0.50
D	20	5.12	6.25
E	10	2.00	1.50

(Index- No. 138.4)

3. From the information given below; calculate cost of living index number of 1998 with 1990 as base year by Family budget Method.

नीचे दी गई सूचनाओं से, पारिवारिक बजट विधि के द्वारा 1990 को आधार मानते हुये 1998 के लिये जीवन निर्वाह सूचकांक की गणना कीजिये।

Commodity वस्तु	Quantity मात्रा	Unit इकाई	Prices (Rs) 1990	मूल्य (रु0) 1998
गेहूँ Wheat	2 Qtls.	Qtls.	75	125
चावल Rice	25Kgs.	Kgs.	12	16
चीनी Sugar	10Kgs.	Kgs.	12	16
घी Ghee	05Kgs.	Kgs.	10	15
कपड़ा Clothing	25Mt.	Mt.	4.5	5
इंधन Fuel	40Lt.	Lt.	10	12
किराया Rent	One	One	25	40

(Index- No.132.18)

4. From the following data prepare Fisher's Ideal Index Number:

निम्न आंकड़ों से, फिषर के आदर्ष सूचकांक का निर्माण कीजिऐः

Article वस्तु	Base Year आधार वर्ष		Current Year चालू वर्ष	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	6	50	9	55
B	2	100	3	125
C	4	60	6	65
D	10	20	14	25

(Index- No.147.79)

5. Calculate Fisher's Ideal Index for the following data and show that it satisfies the time reversal test.

निम्न आंकड़ों से फिशर के आदर्श सूचकांक की गणना कीजिये और दर्शाइये कि यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण को पूरा करता हैः

Commodity वस्तु	1993		1998	
	Price मूल्य	Quantity मात्रा	Price मूल्य	Quantity मात्रा
A	6	70	8	120
B	8	90	10	100
C	12	140	16	280

(Index- No.131.59)

6. Find out Cost of Living Index No. from the following data.
निम्न आंकड़ों से जीवन–निर्वाह सूंचकांक ज्ञात कीजिये–

Commodity वस्तु	Base Year आधार वर्ष	Current Year चालू वर्ष	Weight भार
Food खाद्य सामग्री	30	47	4
Fuel ईंधन	8	12	1
Clothing वस्त्र	14	18	3
House Rent मकान का किराया	22	15	2
Miscellaneous विविध	25	30	1

(Index- No.128.98)

1.11 उपयोगी पुस्तकें (Suggested Readings)

1. डॉ0 एस0एम0 षुक्ल, डॉ0 एस0पी0 सहाय, (2007), सांख्यिकी के सिद्धान्त, साहित्य भवन पब्लिकेषस आगरा।
2. Hooda, R.P., (2001) Statistics for Business & Economics, Mc. Millan India. Ltd., New Delhi.
3. Richard. I. Levin and Devid S. Rubin (1996), Statistics For Management, Printice Hall India Pvt. Ltd., Mumbai.
4. Elhance D.N., Elhance. Veena., Aggawal B.M., (2005), Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, Allahabad.
5. Gupta S.C., (2000), Fundamentals of Statistics, Himalaya Publishing House, New Delhi.

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त
विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

M.COM-04
व्यावसायिक सांख्यिकी

खण्ड

5

सूचकांक एवं गुण नियन्त्रण (भाग- 2)

(Index Numbers and Quality Cntrol)

संरचनात्मक सम्पादन

डॉ0 मंजूलिका श्रीवास्तव — निदेशक, दूरस्थ शिक्षा परिषद्, नई दिल्ली

विषयगत सम्पादन

प्रो0 मूल मोतिहार — प्रोफेसर मोनिरबा, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

लेखक

डॉ0 मनीष कुमार सिन्हा — सी0 एम0 पी0 डिग्री कालेज, इलाहाबाद विश्वविद्यालय इलाहाबाद

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से श्री एम0 एल0 कनौजिया, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, मार्च 2010
मुद्रक नितिन प्रिन्टर्स, 1, पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खण्ड-5 परिचय

आर्थिक जगत में होने वाले उच्चावचनों का प्रभाव सदैव मूल्यों द्वारा परिलक्षित होता है। उत्पादक उपभोक्ता एवं सरकार सदैव इस विशय में सजग रहते हैं। आर्थिक नीतियों के निरूपण में मूल्य ही आधार में रहते हैं।

इस प्रकार से उत्पादक एवं उपभोक्ता वस्तुओं के मूल्य एवं गुणवत्ता के विशय में सजग रहते है। उपभोक्ता मूल्य के बदले उत्कृष्ट गुणवत्ता वाली वस्तुऐं चाहता है। विक्रेता भी प्रतिस्पर्धा में तभी ठहर सकता है ज बवह उत्तम गुणवत्ता वाली वस्तुएं उत्पादित करें।

प्रस्तुत खण्ड सूचकांक एवं गुण नियन्त्रण (Index numbers and Quality Control),व्यवसायिक सांख्यिकी (Business Statistics) M.Com.04 का पॉचवां खण्ड है जो चार इकाइयों में विभक्त है –

1) सूचकांक (Index Numbers)
2) भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)
3) सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण (Statistical Quality Control)
4) नियन्त्रण चार्ट की संरचना (Construction of Control Charts)

UNIT-3- Statistical Quality Control
सांख्यकीय गुण नियन्त्रण

इकाई की रूपरेखा

(Sample Inspection Method)

3.2.4 प्रमुख तत्व

(Main Features)

3.2.5 सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के प्रयोजन

(Purpose of Statistical Quality Control)

3.3 साख्यिकीय गुण नियन्त्रण की विधियाँ

(Techniques of Statistical Quality Control)

3.3.1 उत्पाद नियन्त्रण

(Product Control)

3.3.1.1 उत्पाद नियन्त्रण की विधि

(Technique of Product Control)

3.3.1.2 उपभोक्ता एवं उत्पादक का जोखिम

(Consumer's Risk and Producer's Risk)

3.3.1.2.1 उपभोक्ता का जोखिम

(Consumer's Risk)

3.3.1.2.2 उत्पादक का जोखिम

(Producer's Risk)

3.3.1.3 स्वीकृति प्रतिदर्शन योजनाएं

(Acceptance Sampling Plans)

3.3.1.3.1 एकल प्रतिदर्शन योजना

(Single Sampling Plan)

3.3.1.3.2 दोहरी प्रतिदर्शन योजना

(Double Sampling Plan)

3.3.1.3.3 बहुप्रतिदर्शन योजना

(Multiple Sampling Plan)

3.3.1.3.4 परिचालित लक्षण वक्र

(Operating Characteristic Curve-O.C. Curve)

3.3.2 प्रक्रिया नियन्त्रण

(Process Control)

3.3.2.1. प्रक्रिया नियन्त्रण की विधि

(Techneque of Process Control)

3.4 सारांश

(Summary)

3.5 शब्दावली

(Terminology)

3.6 स्वअभ्यास प्रश्न

(Self Exercise Questions)

3.7 उपयोगी पुस्तकें

(Suggested Readings)

3.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात आप –

- सांख्यिकीय गुण नियंत्रण की अवधारणा से परिचित हो सकेंगे,
- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के महत्व को जान सकेंगे,

- उत्पादित (औद्योगिक) वस्तुओं की एकरूपता एवं गुण्पवत्ता को समरूपता प्रदान करने में सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की भूमिका से परिचित हो सकेंगें,
- उत्पादित वस्तुओं को स्वीकार अथवा अस्वीकार करने के औचित्य का ज्ञान प्राप्त करेंगे,
- विक्रय के लिए उपलब्ध वस्तुओं के चयन में सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की भूमिका का विश्लेषण कर सकेंगे,
- उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता में विचलन एवं उनको दूर करने की तकनीक एवं प्रक्रिया से परिचित हो जाएंगे।

3.1 परिचय (Introduction)

आधुनिक समय में जब विश्व को एक छोटी सी इकाई अथवा गाँव (Global village) के रुप में देखा जाने लगा है तो व्यापार एवं वाणिज्य की सीमाएं भी वृहत्तर होती जा रहीं हैं। प्रत्येक उद्योग इस बात पर बल देता है कि निर्मित वस्तु कभी भी प्रतिस्पर्धा में पिछड़ने न पाएं। उत्पादन के कार्य में उच्च स्तरीय तकनीकि, कुश्रल एवं प्रशिक्षित श्रमिक, अनुभवी प्रबधक एवं तकनीकि विशेषज्ञ एवं उत्तम मशीन एवं उपकरणों का प्रयोग किया जाता है। इतना कुछ प्रयास करने के उपरान्त उत्पादन का होना तो सुनिश्चित है पर यहां पर उद्देश्य पूरा नहीं होता हैं। उत्पादन की मात्रा (Quality) कोई समस्या नहीं होती है, समस्या होती है गुणवत्ता (Quality) । उत्पादक का ध्यान इस बात पर रहता है समस्त उत्पादित वस्तुएं गुणवत्ता की द्रष्टि से स्वीकार्य (Acceptable) हो तथा गुणवत्ता के आधार पर

वस्तुओं की अस्वीकृति (Unacceptability) न होने पाए, दूसरे शब्दों में, उत्पादित वस्तुएं गुणवत्ता के मापदंड पर खरी उतरें तथा उनकी गुणवत्ता में उभयता (Homogeneity) हो।

परन्तु वास्तव में ऐसा देखने में नहीं आता है। यह अनुभव की बात है कि उत्पादित वस्तुएं गुणवत्ता के द्रष्टिकोण से सदैव एकरुप नहीं रहती है। यदि उत्पादित वस्तुएं सामान्य द्रष्टि से एकरुप दिखाई पड़े तो भी उनकी गुणक्ता में ऐसे अन्तर बहुधा पाए जातें है जो वैज्ञानिक द्रष्टि से ही देखे जा सकते हैं अथवा कभी–कभी अन्तर इतने सूक्ष्म होते है कि उनकी पहचान करना कठिन हो जाता है।

प्रत्येक उत्पादन प्रक्रिया में गुणक्ता के कुछ मापदंड होतें हैं जिनके अनुरुप उत्पादित वस्तुओं को होना चाहिए, उदाहरण के लिए पेंसिल उत्पादित करने वाली इकाई में उत्पादित पेंसिलें सामान्यतयः प्रमापित लम्बाई की होनी चाहिए।

एक सफल उयोग के लिये यह आवश्यक है कि उत्पादित वस्तुएं उपभोक्ताओं की उम्मीद एवं आदर्श पर खरी उतरें। सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के माध्यम से उत्पादक इस कार्य को सम्पादित कर सकता है। उत्पादन के विभिन्न चरणों एवं प्रक्रियाओं को सांख्यिकीय नियन्त्रण के माध्यम से प्रमाप अथवा आदर्श के समीप रख कर वांछित गुणवत्ता वाली वस्तुऐं प्राप्त की जा सकती हैं।

3.2 साख्यंकीय गुण नियन्त्रण की अवधारण (Concept of Statistical Quality Control)

आप उपरोक्त पंक्तियों में अध्ययन कर चुकें है कि उत्पादित

वस्तुएं, उत्पादकों एवं उपभोक्ताओं के मापदण्डों पर उपयुक्त होनी चाहिए। किसी उत्पादित वस्तु की गुणवत्ता विभिन्न कारकों द्वारा प्रभावित होती है, जिसमें कच्चामाल, श्रम संसाधन, उत्पादन की प्रक्रिया, उत्पादन की तकनीक, एवं गुणवत्ता नियन्त्रण की प्रक्रिया आदि सम्मिलित होते हैं। एक सजग उत्पादक वस्तु को बाजार में विक्रय के लिये तभी प्रस्तुत करता है जब वस्तुएं पूर्व निर्धारित मापदंडों पर खरी उतरती हैं। सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के माध्यम से उत्पादक के लिये यह प्रक्रिया सरल हो जाती हैं।

3.2.1 विचरण (Variation)

यदि हम किसी भी उत्पादन केन्द्र में जाकर व्यक्तिगत रुप से उत्पादित वस्तुओं की तुलना पूर्व निर्धारित मापदंड़ों से करें तो हम यह पाएगें कि उत्पादित वस्तुओं की सभी इकाईयों एक समान नहीं हैं। उनमें आपस में भी अन्तर होता है और पूर्व निर्धारित मापदंड से भी अन्तर होता है जिसे हम विचरण (Variation) भी कहते हैं। ऐसे विचरण प्रायः पाए जाते हैं और यह एक सामान्य बात होती है। इसी कारण से एक उत्पादक उत्पादित किये जाने वाली वस्तुओं की विशेषताओं के आधार पर प्रमाप (Standards) निर्धारित कर देता है। जैसा कि ज्ञात है कि कुछ न कुछ विचरण प्रमाप से अवश्य पाया जाएगा, इस लिये प्रमाप से विचरण की उच्च एवं निम्न सीमाएं भी पूर्व निर्धारित कर दी जाती हैं जिनके अन्दर आने वाले विचरणों को नजरअन्दाज कर दिया जाता है अथवा नगण्य मान कर उत्पादित वस्तुओं को स्वीकार कर लिया जाता है। जब उत्पादित इकाईयाँ इन पूर्व निर्धारित विचरणों से बाहर चली जाती है तो उन्हें अस्वीकार कर दिया जाता है।

3.2.2 विचरण के कारण (Causes of Variation)

हम अब तक अध्ययन कर के जान चुके हैं कि उत्पादन की कोई भी प्रक्रिया सभी उत्पादों को एक जैसा कभी भी उत्पादित अथवा बना नहीं सकती है। उच्चतम तकनीक एवं सूक्ष्म प्रक्रिया भी सभी उत्पादों को प्रमाप के हुबहु नहीं बना पाती है। कुछ ऐसे सूक्ष्मतर अन्तर होते हैं जो कि साधारणतयः दिखाई नहीं पड़ते है पर रहते अवश्य हैं। एक उदाहरण आप साबुन के उत्पादन को ही ले ले, कभी–कभी उत्पादन प्रक्रिया में किसी उच्चावचन के कारण साबुन के अन्दर हवा का बुलबुला बन जाता है जो ऊपर से कभी भी नहीं दिखता है पर यदि उसकी तौल की जाए तो वजन में मामूली सा अन्तर अवश्य आएगा। ऐसे विचरणों को पकड़ पाना या हमेशा के लिये दूर कर पाना आसानी से सम्भव नहीं होता है। ऐसे विचरणों के अनेक वैज्ञानिक एवं तकनीकि कारण हो सकते हैं, परन्तु सांख्यिकीय द्रष्टिकोण से इनको दो भागों में विभक्त किया जाता है।

3.2.2.1 स्पष्ट कारण (Assignable Causes)

विचरण के स्पष्ट कारण वह होते हैं जिन्हें स्पष्ट रुप से चिन्हित अथवा निर्दिष्ट किया जा सकता है तथा जिन्हें दूर भी किया जा सकता है। ऐसे कारणों के प्रकट होने का स्पष्ट कारण होता है जैसे मशीनों में अचानक दोष आ जाना, कच्चे माल की गुणवत्ता में परिवर्तन होना, ऊर्जा की आपूर्ति बाधित होना तथा श्रमिकों की कार्य क्षमता अथवा उत्पादकता में गिरावट आना आदि। ऐसे कारण स्पष्ट रुप से प्रकट होते हैं और उन्हें पहचान

कर दूर कर दिया जाता है। ऐसे कारणों को त्रुटि कारण अथवा (Chaotic) कारण भी कहा जाता है।

3.2.2.2 सयोंगिक अथवा दैव कारण

(Chance or Random Causes)

विचरण के कुछ ऐसे कारण होते हैं जिनकी प्रकृति स्वाभाविक होती है, तथा जो उत्पादन की प्रक्रिया में ही अर्न्तनिहित होते है, उन्हें संयोगिक (chance) अथवा दैव (random)7 कारण कहते हैं। यह कारण बहुधा छोटे–छोटे कारणों के संचित रुप से दिखाई पड़ने वाले प्रभाव होते हैं जो दैव अथवा यादृच्छिक (random) या संयोगिक (chance) रुप से व्यापित रहते हैं। इन कारणों के प्रकट होने अपना एक स्वतन्त्र प्रवाह होता है। ऐसे कारण किसी भी उत्पादन प्रक्रिया में कभी भी प्रकट हो सकते हैं। इनके बारे में कहा जाता है कि यह प्रकृति (nature) की परिवर्तनशीलता के परिचायक होते हैं। परिवर्तनशीलता अथवा विचरण प्रकृति का नियम है और उत्पादन प्रक्रिया भी इससे प्रभावित होती है। ऐसे कारण सीमित तो किये जा सकते हैं पर पूरी तरह समाप्त नहीं किये जा सकते हैं। इन कारणों को उत्पादन के प्रत्येक आयामों में देखा जा सकता है।

3.2.3 विचरण का परीक्षण (Test of Variation)

तय की गई अथवा निर्दिष्ट माप से उत्पादित वस्तुओं की तुलना (जैसा कि आप उपरोक्त पंक्तियों में अध्ययन कर चुके हैं) करने की दो प्रमुख विधियां है।

3.2.3.1 शतप्रतिशत निरीक्षण विधि

(Cent-percent Inspection Method)

जैसा कि आपको शीर्षक के नाम से ही स्पष्ट हो गया होगा कि उत्पादित वस्तुओं की प्रत्येक इकाई का निरीक्षण किया जाता है। इस विधि के अन्तर्गत उन इकाइयों को स्वीकार कर लिया जाता है जो निर्देशित की गई माप के अनुसार होती हैं। जो उत्पादित इकाइयाँ निर्दिष्ट माप से भिन्न होती है उन्हें अस्वीकार कर दिया जाता है। यह विधि अत्यधिक शुद्ध एवं तकनीकि रुप से पूर्ण प्रतीत होती है परन्तु यथार्थ रुप से अव्यवहारिक होती है क्योंकि प्रत्येक इकाई की व्यक्तिगत रुप से जांच करना उत्पादन के समानान्तर एक स्वतन्त्र कार्य है, यदि ऐसा किया जाए तो उत्पादन इकाई के संसाधनों, जैसे अलग से इस कार्य के लिये कार्मिकों की नियुक्ति, उनका वेतन, एवं समय आदि पर अतिरिक्त व्यय वहन करना पड़ेगा। कभी–कभी ऐसी विधि वास्तविक नहीं सिद्ध होती है जैसे कि माचिस की जांच करने पर सभी तीलियां जलानी पड़ जायेगी। इस बात की सम्भावना भी प्रबल रहती है कि ऐसा कार्य करने वाले कार्मिक ऊबकर दोषपूर्ण वस्तु को स्वीकार कर लें।

3.2.3.2 प्रतिदर्श निरीक्षण विधि (Sample Inspection Method)

आप पूर्व में अध्ययन कर चुके हैं कि प्रतिदर्श विधि एक आदर्श विधि होती है जो विभिन्न प्रकार के परीक्षण के

उपरान्त वैज्ञानिक निष्कर्ष पर पहुंचने में शोधकर्ता की सहायता करती है। उसी प्रकार से इस विधि के अन्तर्गत उत्पादित इकाइयों का यादृच्छिक आधार पर चयन करके निरीक्षण किया जाता है। उत्पादन के विभिन्न चरण एवं प्रक्रिया होती है। उन सभी के स्तर पर निरन्तर यादृच्छिक प्रतिदर्शों को एकत्रित करके उनका परीक्षण किया जाता है। प्रतिदर्श के परीक्षण से निष्कर्ष प्राप्त किया जाता है कि कुल (समग्र) इकाईयां माप के अनुरुप हैं कि नहीं। यह विधि समय, धन एवं श्रम की बचत के कारण व्यापक रुप से अपनाई जाती हैं। परन्तु इस विधि में निरन्तरता का सदैव बने रहना आवश्यक होता है।

3.2.4 प्रमुख तत्व (Main Features)

अब तक के अध्ययन के आधार पर सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के प्रमुख तत्वों को निम्न पंक्तियों में संक्षिप्त रुप से व्यक्त किया जा सकता है–

- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण का उद्देश्य यह पता लगाना होता है कि उत्पादित की जाने वाली वस्तुएं पूर्व निर्धारित मानक के कितना समीप हैं।
- यदि उनमें कोई विचलन है तो उसके कारण क्या हैं और उनको किस प्रकार से दूर किया जा सकता है जिससे कि भविष्य में उनकी पुनरावृत्ति न होने पाए।
- मानक से तुलना एक निरन्तर चलने वाली प्रक्रिया होती है।
- बहुधा प्रतिदर्शों के आधार पर इस क्रिया को सम्पादित किया जाता है। शतप्रतिशत परीक्षण पद्धति वास्तविक नहीं प्रतीत होती है एवं संसाधनों पर अनावश्यक दबाव पड़ता है।
- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की प्रक्रिया में सांख्यिकी विधियों (Statistical Methods) जैसे आवृत्ति वितरण, सम्भाव्यता, प्रमाप विचलन, विभ्रम आदि का प्रयोग किया जाता है।
- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की प्रक्रिया के निष्कर्षों के आधार पर प्रबन्धतन्त्र, उत्पादन की विधि के बारे में निर्णय लेते हैं।

3.2.5 सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के प्रयोजन (Purpose of Statistical Quality Control)

आपको अब तक के अध्ययन से यह अवश्य ही स्पष्ट हो चुका होगा कि उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता में होने वाले विचरणों को पहचान कर उनका विश्लेषण एवं उनको दूर करना सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण का प्रमुख उद्देश्य अथवा प्रयोजन होता है। इसके द्वारा उत्पादन प्रक्रिया में सुधार होता है एवं प्रमापित इकाइयों के उत्पादन की सम्भाव्यता बढ़ती जाती है। उत्पादित इकाइयों का निरन्तर नियन्त्रण एवं विचरण के स्पष्ट एवं दैव कारणों का पार्थक्य अथवा अलग करना इस प्रक्रिया का महत्वपूर्ण कार्य होता है। इस प्रक्रियां के द्वारा विचरण के स्पष्ट कारणों के कारकों को उत्पादन के

विभिन्न चरणों से दूर कर दिया जाता है। इस प्रक्रिया के अपनाये जाने के फलस्वरुप उत्पादन से जुड़े पक्ष उत्पादक एवं कार्मिक सभी गुणवत्ता के विषय में जागरुक बने रहते हैं। इस प्रक्रिया के प्रयोजनों को निम्न बिन्दुओं के माध्यम से पुनः संक्षिप्त रुप से स्पष्ट किया जा सकता है।

- उत्पादित की जाने वाली वस्तु की गुणवत्ता के ऐसे मानक अथवा प्रमाप निर्धारित करना जो कि लाभ की द्रष्टि से श्रेष्ठ होते हैं।
- उत्पादित वस्तुओं के गुणवत्ता की कसौटी पर निरन्तर खरी उतरने के फलस्वरुप व्यवसायिक संस्था की साख में वृद्धि होती रहती हैं।
- उत्पादित वस्तुए सदा प्रमाप के अनुरुप हो ऐसा होना सम्भव नहीं होता है, विचरण परिलक्षित होते ही रहते हैं। परन्तु विचरणों का यदि उचित विश्लेषण किया जाए और उपचारात्मक उपाय किये जाए तो विचरणों को सीमित किया जा सकता है। सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण का यह भी एक उद्देश्य होता है।
- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की विधि में प्रबन्धकीय द्रष्टिकोण से निर्देशन एवं नियन्त्रण का प्रभाव अन्तर्निहित होता है। श्रमिक वर्ग भी सावधान रहता है, उनकी कार्यकुशलता का मूल्यांकन एवं सुधार के निर्देशन निरन्तर किये जाते रहते हैं।

- सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण उत्पादन प्रक्रिया में नवाचार को प्रोत्साहित करता है।

3.3 साख्यिकीय गुण नियन्त्रण की विधियाँ (Techniques of Statistical Quality Control)

3.3.1 उत्पाद नियन्त्रण (Product Control)

उत्पाद नियन्त्रण विधि के अन्तर्गत अन्तिम रूप से निर्मित वस्तुओं का निरीक्षण किया जाता है। इस विधि के द्वारा उत्पादित वस्तुओं को समूहों (lot) के रूप में स्वीकार अथवा अस्वीकार किया जाता है। गुणवत्ता को बनाए रखने के उद्देश्य से कभी–कभी उत्पादन की प्रक्रिया में ही संवेदनशील चरणों पर वस्तुओं का निरीक्षण करना प्रारम्भ कर दिया जाता है। उत्पाद नियन्त्रण विधि को स्वीकृति प्रतिदर्शन (Acceptance Sampling) भी कहा जाता है। क्योंकि निर्मित वस्तुओं के समग्र (कुल उत्पादित वस्तुएं) में से दैव (random) आधार पर वस्तुओं को चुनकर उनका सघन निरीक्षण कर के वस्तुओं की स्वीकृति अथवा अस्वीकृति का निर्णय लिया जाता है।

आज वैश्वीकरण दौर में जहां विदेशी व्यापार एवं औद्योगिक उत्पादन में वृद्धि की दर निरन्तर बढ़ती जा रही है, वहां उत्पाद नियन्त्रण विधि के माध्यम से गुणवत्ता नियन्त्रण का महत्व बहुत बढ़ गया है। वृहद स्तर के उत्पादन, उपभोग, एवं आयात के संदर्भ में यह निर्णय त्वरित रुप से लेना पड़ता है कि उत्पादक के द्वारा आपूर्ति किये गये माल के समूह (lot) को स्वीकार अथवा अस्वीकार किया जाए। इसी प्रकार से निर्यात के संदर्भ में भी निर्णय लेना पड़ता है कि माल को प्रेषित किया जाए अथवा नहीं। इन सभी मामलों में उत्पाद

नियन्त्रण विधि के अन्तर्गत की जाने वाली ''स्वीकृति प्रतिदर्शन'' (acceptance sampling) विधि बहुत ही सहायक होती है। इसके माध्यम से निर्णय लेने में बहुत सरलता प्राप्त हो जाती है।

उत्पादक को सदैव यह ध्यान रखना पड़ता है कि उत्पादित वस्तुए उपभोक्ता की मांग के मानकों के अनुरुप हों। इस विधि को अपनाकर उपभोक्ता स्वयं आश्वस्त हो सकता है कि उत्पादित वस्तुएं उपभोक्ता के मानदंड़ों पर सही हैं। उत्पाद नियन्त्रण विधि के अन्तर्गत ''स्वीकृति प्रतिदर्शन'' द्वारा जो प्रक्रिया अपनाई जाती है उसे ''स्वीकृति निरीक्षण'' (acceptance inspection) भी कहा जाता है, ऐसा इसलिये कहते हैं कि वस्तु समूह की स्वीकृति का निर्णय निरीक्षण पर निर्भर करता हैं।

आजकल बहुआ ऐसा भी देखा जाता है कि क्रय करने वाली इकाइयां समय, श्रम एवं धन जैसे संसाधनों को बचाने के उद्देश्य से उत्पादित करने वाली इकाइयों के नियन्त्रण चार्टों को ही मांग कर उनका अवलोकन करके वस्तुओं के समूह को स्वीकार/अस्वीकार करने का निर्णय ले लेती हैं।

कभी जब वस्तुओं का कोई समूह अस्वीकार कर दिया जाता है तो उसे नष्ट नहीं किया जाता है वरन् पुनः प्रसंस्करित (re-process) कर लिया जाता है अथवा अन्यत्र उपयोग कर लिया जाता है।

3.3.1.1 उत्पाद नियन्त्रण की विधि

(Technique of Product Control)

स्वीकृति प्रतिदर्शन विधि में वस्तु समूह के गुण का अनुमान

न लगाकर निर्णय (स्वीकृति अथवा अस्वीकृति) का निधारण किया जाता है। जब इसे वस्तु समूहों के संदर्भ में क्रियान्वित किया जाता है तब स्वीकृत वस्तु समूहों से जुड़ा हुआ सम्भावित जोखिम (probable risk) के स्तर का ज्ञान प्राप्त हो जाता है। जिन वस्तु समूहों के निरीक्षण की लागत अधिक हो तथा दोषपूर्ण इकाइयाँ भी परिस्थितवश स्वीकृत हो जाए और उनसे सम्भावित हानि न्यूनतम तो यह विधि उपयोगी सिद्ध होती है। जो वस्तुए नष्ट होने वाली प्रकृति की होती है वहां भी यह विधि अपनाई जाती है। इस विधि में पुराना अनुभव सहायक नहीं होता है वरन् प्रत्येक वस्तु समूह के निरीक्षण का वर्तमान परिणाम ही स्वीकृति के निर्णय को प्रभावित करता है।

3.3.1.2 उपभोक्ता एवं उत्पादक का जोखिम

(Consumer's Risk and Producer's Risk)

हम जान चुके हैं कि स्वीकृति निरीक्षण में पिछला अनुभव सहायक नहीं होता है। प्रत्येक वस्तु समूह का पृथक–पृथक (separate) रुप से निरीक्षण किया जाता है और वर्तमान परिणामों के आधार पर निर्णय लिया जाता है। गलत अथवा त्रुटिपूर्ण निष्कर्ष न प्राप्त हो इसके लिये वस्तुसमूहों के प्रतिदर्शन बड़े आकार के होने चाहिये ऐसा होने पर गलत एवं त्रुटिपूर्ण निष्कर्षो की सम्भावन न्यून हो पायगी। इस बिन्दु को ध्यानस्थ करके निरीक्षक उपभोक्ता एवं उत्पादक की ओर से सोचा समझा जोखिम (calculated risk) उठाता है। उत्पादक जहां अधिकतम अस्वीकृति से

सुरक्षा चाहता है नहीं उपभोक्ता न्यूनतम मात्रा में दोषपूर्ण वस्तुओं को स्वीकार करना चाहता है।

3.3.1.2.1 उपभोक्ता का जोखिम (Consumer's Risk)

उपभोक्ता अपने लिये ''दोषपूर्ण वस्तु समूह को स्वीकार करने का एक प्रतिशत'' (Lot Tolerance Percentage Defective-L.T.P.D.) निर्धारित कर लेता है। यह वह अधिकतम सीमा होती है। जिसके अन्दर उपभोक्ता दोषपूर्ण इकाइयों को स्वीकार कर लेता है। पूर्वनिर्धारित प्रमाप स्तर के अनुसार दोषपूर्ण अथवा असंतोषजनक इकाईयों को स्वीकार किये जाने की सम्भावना ही उपभोक्ता का जोखिम (consumer's risk) कहलाती है।

3.3.1.2.2 उत्पादक का जोखिम (Producer's Risk)

उत्पादकों के द्रष्टिकोण से यह सम्भावना भी बलवती रहती है कि ''स्वीकार्य– योग्य गुण स्तर'' (Acceptable Quality Level -A.Q.L.) की वस्तुएं, (जिन्हें साधारणतयः स्वीकार कर लिया जाना चाहिए), भी अस्वीकार न कर दी जाय। इन स्वीकार्य योग्य गुण स्तार (A.Q.L.) के वस्तु समूह को अस्वीकार किये जाने की सम्भावना को उत्पादकों का जोखिम (producer's risk) कहा जाता है।

उपरोक्त दोनों परिस्थितियों के निर्धारण, का निर्णय, उपभोक्ता एवं उत्पादक दोनों पक्षों के मध्य आपसी समझौते के द्वारा कर लिया जाता है। ऐसा करने से स्वीकृति प्रतिदर्शन (Acceptance Sampling) योजना सरल एवं

सर्वग्राह्य हो जाती है।

3.3.1.3 स्वीकृति प्रतिदर्शन योजनाएं (Acceptance Sampling Plans)

हम जानते हैं कि स्वीकृति निरीक्षण प्रतिदर्शन पर आधारित होता है। प्रतिदर्शों के परीक्षण के आधार पर वस्तु समूह को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत किया जाता हैं। एक अस्वीकृत दोषपूर्ण वस्तुसमूह वह होता है जो मानक (गुणवत्ता) के एक या एक से अधिक मानदंड़ों पर खरा नहीं उतरता है। स्वीकृति प्रतिदर्शन की विधि में सर्वमान्य पद्धति यह होती है कि प्रस्तुत किए गए प्रत्येक वस्तु समूह (lot) का अधयन उनमें से दैव (random) रुप से लिये गये प्रतिदर्श, अथवा प्रतिदर्शों के आधार पर किया जाता है, और वस्तुसमूह की स्वीकृति अथवा अस्वीकृति का निर्णय उसी पर आधारित होकर ले लिया जाता है।

3.3.1.3.1 एकल प्रतिदर्शन योजना (Single Sampling Plan)

एकल प्रतिदर्शन योजना विधि के अन्तर्गत एक वस्तु समूह (one lot) अथवा उत्पादन की किसी भी एक प्रक्रिया से कुछ इकाइयों का एक की संख्या में प्रतिदर्श लेकर, उसका भलिभांति निरीक्षण करके उस वस्तु समूह को स्वीकार अथवा अस्वीकार करने का निर्णय ले लिया जाता है। एकल प्रतिदर्शन की कोई भी योजना निम्न प्रकार से क्रियान्वित होती है–

- इस योजना में सर्वप्रथम वस्तु समूह के आकार (size)

पर विचार किया जाता है। जिसे N द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। (N=lot size)

- उस वस्तू समूह से चुने गये प्रतिदर्श को n द्वारा इंगित किया जाता है। (n=sample size)
- प्रतिदर्श में उन दोषपूर्ण इकाइयों की अधिकतम संख्या जिन्हें स्वीकार किया जा सकता है, C द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। (C=maximum number of defectives which can be accepted).
- प्रतिदर्श में जितनी भी वास्तविक रूप से दोषपूर्ण इकाइयां है उनकी संख्या को d द्वारा प्रकट किया जाता है। (d=number of defectives in a sample)

आपको यह ध्यान में सदैव रखना चाहिए कि स्वीकार्य समूह में कुछ ऐसी दोषपूर्ण इकाइंया भी सम्मिलित रहती हैं जिन्हें एक सीमा तक होने पर स्वीकार कर लिया जाता है।

इस योजना प्रक्रिया में -N- आकार के समूह से एक प्रतिदर्श-n-चुन लिया जाता है। उसका गहन निरीक्षण करने के उपरान्त दोषपूर्ण इकाइयों -d- की संख्या ज्ञात कर ली जाती है। यदि d की संख्या C से अधिक होती है (if $d > C$) तो समूह को अस्वीकार कर दिया जाता है। दूसरी परिस्थिति में यदि d की संख्या C से कम या अधिक से अधिक C से बराबर ($d \le C$) होती है तो समूह को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण के लिये, एक समूह में 1000 इकाइयां है, उसमें से 50 इकाइयों का एक प्रतिदर्श चुना जाता है, एवं यह बताया जाता है कि स्वीकृति की संख्या 5 है। इस परिस्थित में 1000 इकाइयों में से 50 इकाइयों का प्रतिदर्श लिया जायगा और यदि उस प्रतिदर्श में 5 से अधिक दोषपूर्ण इकाइयां हो तो समूह को अस्वीकार कर दिया जाएगा।

एकल प्रतिदर्शन योजना एक सरल सुग्राह्य विधि है, जिसे सफलतापूर्वक क्रियान्वित किया जा सकता है। निरीक्षण से पहले प्रतिदर्श (n) के आकार का निर्धारण तथा दोषपूर्ण इकाइयों की अधिकृत स्वीकार्य संख्या (c) का निर्धारण करने में समस्या का सामना करना पड़ता है। इसके लिये अनुभव, उत्पादन करने वाली इकाई की तकनीकि स्थित एवं कुशलता सहायक हो सकती हैं। यह योजना तभी सफल कहलाई जा सकती है जब न्यूनतम निरीक्षण में उत्पादक एवं उपभोक्ता दोनों के हित सुरक्षित रहें।

3.3.1.3.2 दोहरी प्रतिदर्शन योजना (Double Sampling Plan)

एक प्रतिदर्श के निरीक्षण के आधार पर समूह की स्वीकृति अथवा अस्वीकृति के सम्बन्ध में यदि किसी निर्णय पर सहमति नहीं बन पाई है, तो ऐसी स्थित में दूसरा प्रतिदर्श और ले लिया जाता है। तत्पश्चात् दोनों प्रतिदर्शों से प्राप्त परिणामों के सम्मिलित अध्ययन के बाद स्वीकृति अथवा अस्वीकृति का निर्णय लिया जाता है। दूसरे शब्दों में यदि कहा जाए तो एक प्रतिदर्श के निरीक्षण के उपरान्त लिये जाने वाले निर्णय को स्थगित कर के दूसरा प्रतिदर्श लिया

जाता है और फिर सम्मिलित अध्ययन के उपरान्त निर्णय लिया जाता है। एक बात अवश्य ध्यान में रखना चाहिए कि दूसरा प्रतिदर्श तभी लिया जाता है जब पहले प्रतिदर्श से अनिर्णय की स्थित प्राप्त होती है। इस योजना में निम्न चरण समाहित रहते हैं–

- समूह का आकार–N (N=lot size)
- प्रथम प्रतिदर्श की संख्या–n_1 (size of first sample)
- प्रथम प्रतिदर्श स्वीकार्य संख्या–C_1 (acceptance number of first sample)
- दूसरे प्रतिदर्श की संख्या–n_2 (size of second sample)
- दोनों प्रतिदर्श की सम्मिलित स्वीकार्य संख्या–C_2 (acceptance number for both the sample combined)
- प्रथम प्रतिदर्श में दोषपूर्ण इकाइयों की संख्या–d_1 (number of defectives in first sample)
- द्वितीय प्रतिदर्श में दोषपूर्ण इकाइयों की संख्या–d_2 (number of defectives in second sample)

उदाहरण के लिये यदि आपके पास दोहरी प्रतिदर्शन योजना से सम्बन्धित निम्न सूचनाएं है–

$N = 1000, n_1=50, C_1=5, n_2=100, C_2=10$

तो आपको निम्न प्रक्रिया का पालन करना पड़ेगा–

(i) 50 इकाइयों के प्रथम प्रतिदर्श में यदि 5 अथवा 5 से कम दोषपूर्ण इकाइयों है तो इसके आधार पर समूह स्वीकार

किया जा सकता है।

(ii) यदि 50 इकाइयों के प्रतिदर्श में 5 से अधिक दोषपूर्ण इकाइयाँ है तो इस आधार पर समूह अस्वीकार किया जा सकता है।

(iii) यदि प्रथम प्रतिदर्श में 6 या 7 दोषपूर्ण इकाइयाँ है तो 100 इकाइयों के दूसरे प्रतिदर्श का निरीक्षण करिये।

(iv) यदि 150 इकाइयों के सम्मिलित प्रतिदर्श में 10 या उससे कम दोषपूर्ण इकाइयाँ है तो समूह को स्वीकार किया जाना चाहिये।

(v) यदि 150 इकाइयों के सम्मिलित प्रतिदर्श में 10 से अधिक दोषपूर्ण इकाइयाँ है तो समूह को अस्वीकार कर देना चाहिये।

इस संदर्भ में यह सदैव ध्यान में रखना चाहिए कि प्रथम प्रतिदर्श के निरीक्षण के परिणाम अनिश्चित हो तभी दूसरे प्रतिदर्श का निरीक्षण करना चाहिए। दोहरे प्रतिदर्श योजना में इस बात का मनोवैज्ञानिक बल रहता है कि समूह के लिये एक अवसर अभी और है। इसके द्वारा स्वीकृति अथवा अस्वीकृति दोनों ही प्रभावपूर्ण होती है।

3.3.1.3.3 बहुप्रतिदर्शन योजना

(Multiple Sampling Plan)

जैसा कि आप जान चुके है कि दोहरी प्रतिदर्शन योजना में दूसरे प्रतिदर्श के निरीक्षण के परिणाम तक स्वीकृति अथवा अस्वीकृति के निर्णय को स्थगित कर दिया जाता है, उसी

प्रकार से एक के बाद एक कितने ही प्रतिदर्शों के निरीक्षण के बाद स्वीकृति अथवा अस्वीकृति के निर्णय लिये जा सकते हैं। तीन या तीन से अधिक प्रतिदर्श के निरीक्षण के आधार पर जब निर्णय लिये जाते हैं तब ऐसी पद्धति को बहुप्रतिदर्शन अथवा सिलसिलेवार अथवा अनुक्रमिक प्रतिदर्शन योजना कहते हैं। एकल प्रतिदर्शन योजना में प्रतिदर्श का आकार पूर्व निर्धारित होता है पर दोहरे अथवा बहु प्रतिदर्शन योजना में प्रतिदर्श का आकार भिन्न–भिन्न हो सकता है। प्रतिदर्श की औसत संख्या (Average Sample Number) समूह के गुण पर आधारित होती है।

बहुप्रतिदर्शन योजना थोड़ा जटिल होती है और इससे बचने का प्रयास किया जाता है पर इसका अपना लाभ होता है जो निर्णय को प्रभावी ढंग से सिद्ध करता है। बहु प्रतिदर्शन योजना में प्रतिदर्शों का आकार छोटा होता है तथा निरीक्षण भी दोहरी प्रतिदर्शन योजना से भिन्न नहीं होता है। वास्तव में दोहरी प्रतिदर्शन योजना के अन्तर्गत किया जाने वाला निरीक्षण एकल प्रतिदर्शन योजना के अन्तर्गत किये जाने वाले निरीक्षण से छोटा ही होता है।

3.3.1.3.4 परिचालित लक्षण वक्र

(Operating Characteristic Curve-O.C. Curve)

आप उपरोक्त उद्धरित पक्तियों में अवगत हो चुके हैं कि वस्तु समूहों को स्वीकार अथवा अस्वीकार करने के निर्णय को प्राप्त करने के लिये प्रतिदर्शन योजनाओं की सहायता

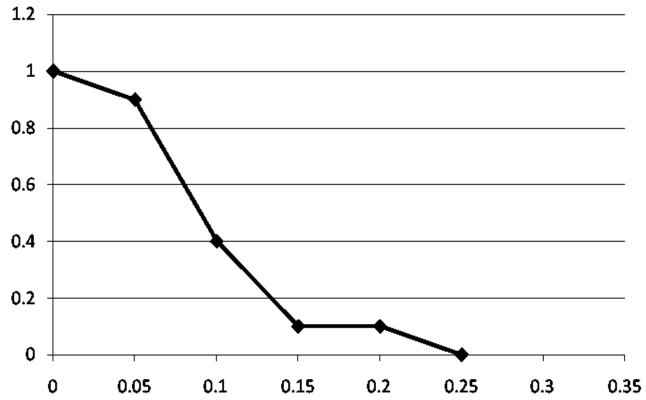
ली जाती है। यह योजनाएं सरल एवं वैज्ञानिक द्रष्टिकोण से उचित समझी जाती है। परिचालित लक्षण वक्र (O.C. Curve) भी उत्पाद नियन्त्रण की एवं सर्वमान्य पद्धति है जिसके द्वारा दोषपूर्ण (defective) एवं दोषरहित (non defective) वस्तु समूहों को पृथक किया जाता है तथा इनकी सम्भावनाओं (स्वीकृति/अस्वीकृति) की दिशा प्राप्त की जाती है।

परिचालित लक्षण वक्र (O.C. Curve) प्रतिदर्श निरीक्षण की योजना को बिन्दुरेखीय विधि से प्रस्तुत करता है। इसकी रचना ''पायसन वितरण'' (Poisson Distribution) के आधार पर की जाती है।

परिचालित लक्षण वक्र के द्वारा वस्तु समूह की स्वीकृति की सम्भावना और उसके गुण के सम्बन्धों को प्रकट किया जाता है। इसके द्वारा, समूह में दोषपूर्ण इकाईयों का निश्चित अनुपात होने पर, किसी भी प्रतिदर्शन योजना के अपनाए जाने के परिणामस्वरूप, समूह के स्वीकृत होने की सम्भावना का पता लगाया जा सकता है। जैसे–जैसे समूह की वस्तुओं के गुणों में कमी आती जाएगी, समूह के स्वीकृत होने का प्रतिशत कम होता जाएगा। यदि समूह में दोषपूर्ण वस्तुओं का प्रतिशत शून्य है तो समूह निश्चत ही स्वीकार कर लिया जाएगा। (ऐसी स्थित में परिचालित लक्षण वक्र सदैव 100 प्रतिशत से प्रारम्भ होगा)। इसके विपरीत यदि समूह में दोषपूर्ण वस्तु 100 प्रतिशत हो तो वह समूह निश्चित ही अस्वीकार कर दिया जाएगा। इस दशा

में परिचालित लक्षण वक्र उस समूह के लिए शून्य पर होगा। परिचालित लक्षण वक्र (O.C. Curve) समूह के गुण एवं उसके स्वीकार किये जाने की सम्भावना की प्रकट करता है।

नीचे दिये गये परिचालित लक्षण वक्र का अवलोकन करें।



उपरोक्त वक्र चित्र में यह माना गया है कि स्वीकार अथवा अस्वीकार किये जाने के निर्णय को दोषपूर्ण इकाइयों के अनुपात में लिया जाएगा। इसे P_a एवं P_r के द्वारा क्रमशः दर्शाया गया है। यहां पर–

$P_a = 0.05, P_r = 0.15$ माना गया है।

इस वक्र के अनुसार P_a=0.05 रहते हुए समूह के स्वीकार होने की सम्भावना 0.9 के समीप है, अतः अस्वीकार करने की सम्भावना 0.1 के लगभग है। यही उत्पादक का जोखिम है।

इसी प्रकार से P_r=0.15 रहते हुए समूह के स्वीकार होने

की सम्भावना 0.1 के समीप है, यह उपभोक्ता का जोखिम है।

इस स्थित में उत्पादक एवं उपभोक्ता का जोखित लगभग समान है अतः समूह को स्वीकार्य होना चाहिए।

3.3.2 प्रक्रिया नियन्त्रण (Process Control)

आपको शीर्षक से ही समझ में आ जाएगा कि प्रक्रिया से आशय उत्पादन की प्रक्रिया से है। वस्तुओं की गुणवत्ता का नियन्त्रण उत्पादन की प्रक्रिया में ही किया जाय, यह उपयुक्त एवं सरल होता है। उत्पादन प्रक्रिया में विभिन्न प्रकार की तकनीकि एवं गैर तकनीकि विधियां प्रयोग में लाई जाती है। प्रक्रिया नियन्त्रण के अन्तर्गत उन सभी तकनीकियों पर निगरानी करके उनको गुणवत्ता के अनुरुप नियन्त्रित एवं निर्देशित किया जाता है। इसके अन्तर्गत यह सुनिश्चित किया जाता है कि उत्पादित वस्तुएं पूर्व निर्धारित मानको के अनुरूप हो। उत्पादित वस्तुएं यदि गुणवत्ता के स्तर पर खरी न उतरती हों तो उत्पादन की प्रक्रिया को संशोधित किया जा सकता है और यदि आवश्यक हो तो उत्पादन प्रक्रिया को रोक कर मानक के अनुरूप पुनः प्रारम्भ किया जा सकता है। प्रक्रिया नियन्त्रण का उद्देश्य यही होता है कि अन्तिम रुप से तैयार वस्तुएं मानक के अनुरूप हों। उत्पादन की प्रक्रिया नियन्त्रण में है, ऐसा तभी कहा जा सकता है, जब उत्पादित वस्तुओं का मानक से विचलन नगण्य हो और वह भी दैव (chance) कारणों से हो, एवं विचलन का कोई भी कारण निर्दिष्ट न किया जा सके। यदि ऐसी स्थित बनी रहती है तो उत्पादन निर्बाध रूप से किया जा सकता है। परन्तु यदि ऐसा न हो और

उत्पादन की प्रक्रिया नियन्त्रण से बाहर हो जाए तो उत्पादन को तुरन्त स्थगित करके, विचलनों के कारणों को चिन्हित कर एवं उनको दूर करके उत्पादन पुनः प्रारम्भ किया जाना चाहिए।

प्रक्रिया नियन्त्रण विधि एक सफल एवं सर्वग्राह्य विधि है जो कि उत्पादन प्रक्रिया में अर्न्तनिहित होती है तथा पूर्व निर्धारित मानकों को प्राप्त कराने की सफल विधि के रूप में जानी जाती है। इस विधि के द्वारा विचलन के कारणों को प्रारम्भिक अवस्था में ही चिन्हित कर लिया जाता है और सुधारात्मक प्रयास प्रारम्भ कर दिये जाते हैं। इसके कारण संगठन को विभिन्न प्रकार के लाभ एवं सुविधाएं प्राप्त हो जाती है, जैसे समय, श्रम एवं धन की न्यूनतम क्षति, वस्तुओं की अस्वीकृति की न्यूनतम दर एवं भविष्य के लिये पूर्वानुमान की शुद्धता इत्यादि।

3.3.2.1. प्रक्रिया नियन्त्रण की विधि

(Technique of Process Control)

प्रक्रिया नियन्त्रण के अन्तर्गत नियन्त्रण चार्ट (Control Charts) के माध्यम से उत्पादन की प्रक्रिया के दौरान निर्माणाधीन इकाइयों के गुणों को पूर्व निर्धारित मानदण्डों (predetermined standards) के अनुरूप नियन्त्रित एवं परिवर्तित, किया जाता है। नियन्त्रण चार्टों के माध्यम से उत्पादक को वस्तु के गुण को नियन्त्रित करने में तथा मानक से विचलन को सीमित करने में अत्यधिक सहायता प्राप्त होती है। नियन्त्रण चार्टो के माध्यम से साख्यिकी गुण नियन्त्रण की विधि का विस्तार से वर्णन इकाई–4 में किया गया है।

3.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में आपको सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण (Statistical Quality Control) के विषय में जानकारी दी गई है। औद्योगिक उत्पादन के क्षेत्र में उत्पादित वस्तुओं की एकरुपता (Uniformity) एवं गुणवत्ता (Quality) सदैव समरुप (Homogeneus) रहें इस बात का प्रयास उत्पादक निरन्तर करते रहते हैं। यही विषय उपभोक्ता की मांग का केन्द्र बिन्दु रहता है। सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण के माध्यम से उत्पादक, वस्तुओं की गुणवत्ता को बनाए रखने का कार्य करता है। इसके माध्यम से उत्पादक के स्तर पर ही वस्तुओं की स्वीकार्यता (acceptability) अथवा अस्वीकार्यता (rejectability) का निर्णय हो जाता है। उत्पादित वस्तुएं जब उत्पादक के स्तर पर ही स्वीकार हो जाती हैं तभी उन्हें उपभोक्ता के समक्ष प्रस्तुत किया जाता है। उपभोक्ता के स्तर से यदि वस्तुएं अस्वीकार कर दी जाती हैं तो यह उत्पादक की साख एवं प्रतिष्ठा के लिए प्रतिकूल होता है। आज से वैश्वीकरण के दौर में जहां उद्योगों को अर्न्तराष्ट्रीय प्रतिस्पर्धा का सामना करता पड़ रहा है, वहां इसका महत्व और भी बढ़ गया है। वस्तुएं गुणवत्ता के आधार पर अस्वीकृत न हो और गुणवत्ता की समरूपता सदैव बनी रहे, इस बात का ध्यान सदैव रखना पड़ता है। प्रत्येक उत्पादन प्रक्रिया में गुणवत्ता के जो मापदंड होते है उनका पालन अवश्य होना चाहिए। एक सजग उत्पादक वस्तुओ को बाजार में विक्रय के लिये तभी प्रस्तुत करता है जब वस्तुएं पूर्वनिर्धारित मापदंड पर खरी उतरती है।

यदि वास्तव में किसी उत्पादन प्रक्रिया का अवलोकन व्यक्तिगत

रुप से किया जाए तो वस्तुओं में आपस में एवं मापदंडों (प्रमाप) से सदैव विचलन दिखाई पड़ेगा। विचरण के प्रमुख कारण दैव अथवा संयोगिक कारण (chance or random causes) तथा स्पष्ट कारण (assignable causes) होते हैं। दैव कारण मानवीय नियन्त्रण की परिधि ा से बाहर होते हैं और इन्हें स्थाई रुप से दूर नहीं किया जा सकता है। यह प्रक्रिया में अर्न्तनिहित होते हैं। विचरण के स्पष्ट कारणों को चिन्हित अथवा निर्दिष्ट किया जा सकता है। कारणों का विश्लेषण करके उत्पादन प्रक्रिया में परिवर्तन कर के उन्हें भविष्य में दूर किया जा सकता है। विचरण के विश्लेषण अथवा परीक्षण को शत प्रतिशत निरीक्षण द्वारा अथवा प्रतिदर्श निरीक्षण द्वारा किया जा सकता है। शत प्रतिशत निरीक्षण एक पूर्ण एवं तार्किक विधि है परन्तु यह बहुत ही छोटी प्रक्रिया में ही सम्भव है, क्रियात्मक रुप से यह विधि अव्यवहारिक होती है। प्रतिदर्श निरीक्षण विधि एक व्यवहारिक विधि होती है, जिसमें प्रतिदर्श को यादृच्छिक रूप से चुनकर उनका परीक्षण किया जाता है।

सांख्यिकी गुण नियन्त्रण की प्रमुख विधियों में प्रक्रिया नियन्त्रण एवं उत्पाद नियन्त्रण दो प्रमुख विधियां हैं। प्रक्रिया नियन्त्रण के अन्तर्गत वस्तुओं की गुणवत्ता का नियन्त्रण उत्पादन की प्रक्रिया के दौरान ही किया जाता है। उत्पादन प्रक्रिया में ही यह सुनिश्चित करने का प्रयास किया जाता है कि उत्पादन पूर्व निर्धारित मानदण्डों (standards) के अनुरूप होता रहे। प्रक्रिया नियन्त्रण तभी सफल कहा जा सकता है जब उत्पादित वस्तुओं का मानक से विचलन (deviation) नगण्य (negligible) हो और वह भी दैव कारणों से हो जिनका कोई भी कारण निर्दिष्ट न किया जा सके।

प्रक्रिया नियन्त्रण को नियन्त्रण चार्टो (control charts) के माध्यम से क्रियान्वित किया जाता है। (इकाई 4 में इसे विस्तृत रुप से वर्णित किया गया है।)

उत्पाद नियन्त्रण विधि के अन्तर्गत अन्तिम रूप से निर्मित वस्तुओं (finished products) का निरीक्षण किया जाता है। इस विधि के अन्तर्गत वस्तुओं को समूहों के रुप में स्वीकार अथवा अस्वीकार किया जाता है। वैश्वीकरण के दौर में आयात एवं निर्यात के संदर्भ में त्वरित निर्णय लेने पड़ते है कि वस्तु समूह को स्वीकार किया जाए या न किया जाए अथवा प्रेषित किया जाय अथवा न किया जाए। इन सब विषयों में उत्पाद नियन्त्रण विधि के अन्तर्गत स्वीकृति प्रतिदर्शन (acceptance sampling) सहायक सिद्ध होती है। उत्पाद नियन्त्रण विधि पूरी तरह से प्रतिदर्श परीक्षण पर आधारित होती है।

उत्पादक को इस कार्य के लिए प्रतिदर्श परीक्षण की योजना अपने उद्देश्य के अनुसार बनानी पड़ती है। एकल प्रतिदर्शन योजना (Single Sampling Plan), दोहरी प्रतिदर्शन योजना (Double Sampling Plan) एवं बहुप्रतिदर्शन योजना (Multiple Sampling Plan) आदि प्रमुख प्रतिदर्शन योजनाएं होती हैं। परिचालित लक्षण वक्र (Operating Characterstic Curve) भी एक बिन्दुरेखीय विधि है जिसमें विन्दुरेखीय वक्र के द्वारा वस्तु समूह के स्वीकार अथवा अस्वीकार किये जाने की सम्भावना को दर्शाया जाता है।

इस प्रकार से आपने इस इकाई में अध्ययन किया कि सांख्यिकीय गुणवत्ता का महत्व कया है एवं क्यों इसे अपनाना उत्पादक एवं उपभोक्ता दोनों के लिये लाभदायक होता है।

3.5 शब्दावली (Terminology)

1. सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण (Statistical Quality Control):–

उत्पादित वस्तुओं की गुणवत्ता, एकरुपता एवं समरुपता को बनाए रखने के प्रयास की विधि।

2. स्वीकृति (Acceptance):–

उत्पादित वस्तुओं समूह की मानदंड़ों पर खरा उतरने के बाद, आपूर्ति के लिए स्वीकृति।

3. अस्वीकृति (Rejection):–

उत्पादित वस्तु समूह की मानदंड़ों पर खरा न उतरने के बाद अस्वीकृति।

4. वस्तु समूह (Lots):–

उत्पादित वस्तुओं का एक समूह

5. विचरण (Variance):–

उत्पादित इकाई की पूर्वनिर्धारित मानदण्डों से भिन्नता

6. शतप्रतिशत निरीक्षण (Centperecent Inspection):–

उत्पादन की प्रत्येक इकाई का व्यक्तिगत अवलोकन

7. प्रतिदर्श निरीक्षण (Sample Inspection):–

उत्पादन की कुछ इकाईयों का यादृच्छिक रुप से निरीक्षण

8. प्रक्रिया नियन्त्रण (Process Control):–

उत्पादन की प्रक्रिया के दौरान ही गुणवत्ता का नियन्त्रण

9. उत्पाद नियन्त्रण (Product Control):–

उत्पादित वस्तु समूह की गुणवत्ता का नियन्त्रण

10. स्वीकृति प्रतिदर्शन (Acceptance Sampling):–

प्रतिदर्श निरीक्षण के आधार पर वस्तु समूह की स्वीकृति।

11. एकल प्रतिदर्शन (Single Sampling):–

वस्तु समूह में से कुछ इकाइयों का एक प्रतिदर्श।

12. दोहरा प्रतिदर्शन (Double Sampling):–

वस्तु समूह में से कुछ इकाइयों का दूसरा प्रतिदर्श।

3.6 स्वअभ्यास प्रश्न (Self Exercise Questions)

1. सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण से क्या आशय है? इसके विभिन्न आयामों की व्याख्या करिए। (What is meant by Statistical Quality Control? Explain its various dimensions).
2. यादृच्छिक कारण और स्पष्ट कारणों को स्पष्ट करिए। गुण नियन्त्रण विधि में इनके महत्व को समझाइए। (Explain in random causes and assignable causes. Explain their impotance in quality control).
3. प्रक्रिया नियन्त्रण एवं उत्पादक नियन्त्रण में अंतर स्पष्ट करिए। (Differentiate between process and product control).
4. स्वीकृति प्रतिदर्शन से क्या आशय है? इसकी विभिन्न योजनाओं का उल्लेख करिए। (What is meant by acceptance sampling? mention its various plans).

5. एकल प्रतिदर्शन योजना एवं दोहरी प्रतिदर्शन योजनाओं को विस्तार से लिखिए। (Explain in detail about the single sampling plan and double sampling plans).

3.7 उपयोगी पुस्तकें (Suggested Readings)

1. Garrett. Herery. E., (2007), Statistics in Psychology and Education, Kalyani Publishers, New Delhi.
2. Gupta, S.C. (2005), Fundamentals of Statistics, Himalya Publishing House, Mumbai.
3. Hooda. R.P., (2003), Statistics for Business and Economics, Macmillan India Ltd., New Delhi.
4. Elhance. D.N., Elhance. Veena, Aggarwal. B.M., (2005) Fundamentals of Statistics, Kitab Mahal, Allahabad.

UNIT-4 - Construction of Control Charts
नियन्त्रण चार्ट की संरचना

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप

- प्रक्रिया नियन्त्रण के सबसे महत्वपूर्ण उपकरण नियन्त्रण चार्ट की अवधारणा का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे,

- उत्पादन की प्रक्रिया के दौरान ही उत्पादित किए जाने वाली वस्तुओं की गुणवत्ता को नियन्त्रित करने में नियन्त्रण चार्टों की भूमिका का विश्लेषण कर सकेंगे,
- केन्द्रीय रेखा, ऊपरी नियन्त्रण सीमा एवं निम्न नियन्त्रण सीमा की अवधारणा से परिचित हो सकेंगे,
- चर समंकों एवं गुण समंको के लिये बनाए जाने वाले विभिन्न चार्टों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे,
- किसी उत्पादन प्रक्रिया के सन्दर्भ में नियन्त्रण चार्टों की संरचना कर सकेंगे।

4.1 परिचय (Introduction)

इकाई 3 में आपने अध्ययन किया था कि प्रक्रिया नियन्त्रण, सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की एक ऐसी विधि है जिसके द्वारा उत्पादन की प्रक्रिया के दौरान ही उत्पादित होने वाली वस्तु का गुण नियन्त्रण करने का प्रयास किया जाता है। इस विधि में इस बात पर बल दिया जाता है कि उत्पादित वस्तुए पूर्व निर्धारित मानदंडों के अनुरुप हो। यदि उत्पादन मानक के अनुरुप नहीं हो रहा है तो यह विधि, उत्पादन को स्थगित कर, उसे संशोधित कर पुर्नप्रारम्भ करने पर केन्द्रित करती है। प्रक्रिया नियन्त्रण विधि नियन्त्रण चार्टो के माध्यम से प्रभावशाली रुप से क्रियान्वित की जाती है।

नियन्त्रण चार्ट (मानचित्र, अथवा सारणी) एक ऐसा उपाय है जिसके माध्यम से, उत्पादन प्रक्रिया के असामान्य विचलनों को

चिहिन्त किया जाता है। यह एक प्रकार का बिन्दुरेख होता है जो उत्पादित इकाइयों की गुणों की दिशा एवं सीमाओं को प्रदर्शित करता है, जिसके आधार पर उत्पादन को जारी रखने या संशोधित करने के विषय में निर्णय लिया जाता है। नियन्त्रण चार्टों की सहायता से उत्पादन के पूर्व निर्धारित मानदंडों को बहुत सीमा तक प्राप्त किया जा सकता है। इनके द्वारा उत्पादक को यह पता चलता रहता है कि उत्पादन की गुणवत्ता नियन्त्रण में है अथवा नहीं।

4.2 नियन्त्रण चार्टों की अवधारण एवं अर्थ (Meaning and Concept of Control Charts)

आप जानते हैं कि नियन्त्रण चार्ट वास्तव में एक बिन्दुरेखीय प्रस्तुति होती है, जिसकी रचना सरलता से की जा सकती है। इसमें वह सीमाएं द्रष्टिगत होती हैं जिनके भीतर यदि उत्पादन को नियन्त्रित रखा जाए तो उत्पादित वस्तुओं में वांछित गुणवत्ता प्राप्त की जा सकती है।

नियन्त्रण चार्ट के बिन्दुरेख में तीन प्रमुख क्षैतिज समानान्तर रेखाएं (Horizontal parallel Lines) होती है जिनके इधर–उधर अथवा ऊपर नीचे उत्पादित किये जाने वाली वस्तुओं से लिये गये प्रतिदर्शों से सम्बन्धित माप अंकित किये जाते हैं। क्षैतिज रेखाएं निम्न होती हैं–

4.2.1 केन्द्रीय रेखा (Central Line-C.L.)

जैसा कि नाम से स्पष्ट है कि, केन्द्रीय रेखा नियन्त्रण चार्ट के बिन्दुरेख के मध्य में स्थापित होती है। केन्द्रीय रेखा अवलोकित किये

गये प्रतिदर्शों के मापों के माध्य μ (जिसे बड़ा माध्य–grand average भी कहते हैं और $\bar{\bar{X}}$ के द्वारा भी इंगित करते हैं) को प्रर्दशित करती है। यह केन्द्रीय रेखा उत्पादन के पूर्व निर्धारित मानक के स्तर को प्रदर्शित करती है। यदि उत्पादन आदर्श रुप से हो रहा हो और मानकों के अनुरुप हो तो लिये प्रतिदर्शों के सभी मूल्य इसी रेखा पर अंकित हो जाएगें। वास्तव में ऐसे आदर्श को प्राप्त नहीं किया जा सकता है, कुछ न कुछ विचलन अवश्य द्रष्टिगोचर होता है भले ही वह दैव कारणों से ही क्यों न हो।

4.2.2 ऊपरी नियन्त्रण सीमा (Upper Control Limit-U.C.L.)

ऊपरी नियन्त्रण सीमा रेखा, नियन्त्रण चार्ट के बिन्दुरेख में केन्द्रीय रेखा से ऊपर की ओर स्थापित होती है। ऊपरी नियन्त्रण सीमा यह इंगित करती है कि मानक से कितना धनात्मक विचलन स्वीकार किया जा सकता है। समान्यतयः माध्य में प्रमाप विचरण का तीन गुना जोड़ ($\mu+3\sigma$) कर ऊपरी नियन्त्रण की सीमा निर्धारित कर ली जाती है और उसे बिन्दुरेख पर अंकित कर ऊपरी नियन्त्रण सीमा रेखा प्राप्त कर ली जाती है।

4.2.3 निम्न नियन्त्रण सीमा (Lower Control Limit-L.C.L.)

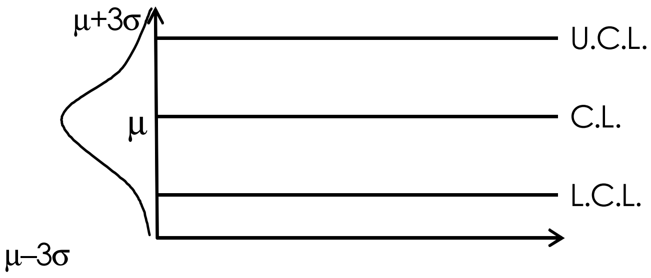
निम्न नियन्त्रण सीमा रेखा नियन्त्रण चार्ट के बिन्दुरेख में केन्द्रीय रेखा से नीचे की ओर स्थापित होती है। मानक से स्वीकार्य ऋणात्मक विचलन को यह प्रदर्शित करती है।

माध्य से प्रमाप विचरण का 3 गुना घटा (μ–3) कर निम्न नियन्त्रण सीमा निर्धारित की जाती है एवं उसे बिन्दु रेख पर रेखा के

रुप में अंकित कर दिया जाता है।

नियन्त्रण चार्ट

Control Chart



यहां पर एक बात आपको स्मरण करना होगा कि दैविक आधार पर चुने गए प्रतिदर्शों की इकाइयों की मापों के माध्य का प्रदिर्शन सामान्य वितरण (normal distribution) के अनुरुप ही होता है। इसीलिये जब ऐसे प्रतिदर्शों के बड़े माध्य ($\bar{\bar{x}}$ or μ) में $\pm 3\,\sigma$ की सीमाए ज्ञात की जाती हैं तो उनका वक्र सामान्य वितरण वक्र (Normal Distribution Curve) के अनुरुप होता है। ऐसा वक्र घंटे (Bell) के आकार का होता है। यह 3σ की सीमाएं इस मान्यता पर आधारित हैं कि यदि एक चर x (जहां μ माध्य हो और σ प्रमाप विचलन हो) सामान्य रुप से वितरित है तो इस बात की सम्भावना बलवती होगी कि जब उसका दैव रुप से अवलोकन किया जाएगा तो वह वितरण $\mu \pm 3\sigma$ अर्थात् 99.73 प्रतिशत तक दोनों ओर दिखाई पड़ेगा। व्यवहारिक रुप से नियन्त्रण सीमाओं का निर्धारण $\mu \pm 3\sigma$ के द्वारा होता है। ऐसा इसलिए होता है कि 99.73 प्रतिशत प्रतिदर्श इकाइयों का वितरण इन्हीं सीमाओं के अन्तर्गत होता है। जो प्रतिदर्श बिन्दु इन सीमाओं के बाहर चले जाते हैं उन्हें सार्थक मान लिया

जाता है। जो यह इंगित करता है कि विचलन का कारण दैविक न होकर स्पष्ट अथवा निर्दिष्ट है। जब सभी प्रतिदर्शों का फैलाव इन सीमाओं के अन्दर होता है तो उनके विचरण को सार्थक नहीं माना जाता है और उनका कोई कारण निर्दिष्ट अथवा स्पष्ट नहीं वरन् दैव होता है।

क्रियात्मक स्तर पर यदि विचार करें तो इसकी प्रणाली यह है कि समय–समय पर उत्पादन की प्रक्रिया से उत्पादित की जाने वाली वस्तुओं से प्रतिदर्शों को लिया जाता है और उनकी मापों को नियन्त्रण चार्ट के बिन्दुरेख पर अंकित कर दिया जाता है। यदि अंकित माप नियन्त्रण सीमाओं (ऊपरी नियन्त्रण सीमा U.C.L. एवं निम्न नियन्त्रण सीमा L.C.L.) के भीतर हैं तो ऐसा माना जाता है उत्पादन की प्रक्रिया नियन्त्रण में है और जो भी विचरण (नियन्त्रण सीमाओं के भीतर) है वह संयोग अथवा दैव कारणों से हैं, और अपरिहार्य (Inevitable) है। जिस क्षण माप ऊपरी नियन्त्रण सीमा (U.C.L.) से ऊपर चले जाते हों अथवा निम्न नियन्त्रण सीमा (L.C.L.) से नीचे चले जाते हों, तो यह मानना पड़ता है कि विचलन (Variation or deviation) के स्पष्ट अथवा निर्दिष्ट कारण है। ऐसी स्थित में उत्पादन प्रक्रिया को स्थगित कर विचलन के कारणों को चिहिन्त किया जाना चाहिए एवं उनका विश्लेषण कर उनको दूर करने के बाद उत्पादन पुर्नचालित किया जाना चाहिए।

इस संदर्भ में कभी–कभी ऐसी स्थिति आ जाती है जब माप के बिन्दु के सीमाओं के भीतर होते हुए भी उत्पादन स्थगित कर विश्लेषण किया जाता है। ऐसा तब होता है जब अंकित बिन्दुओं का फैलाव सामान्य न हो अर्थात् एक ही दिशा की ओर हो अथवा एक ही अनुक्रम में हो। ऐसी स्थित भविष्य में आने वाले किसी विशेष दोष की सूचक भी हो सकती है, अतः इसे उपेक्षित नहीं करना चाहिए। ऐसी

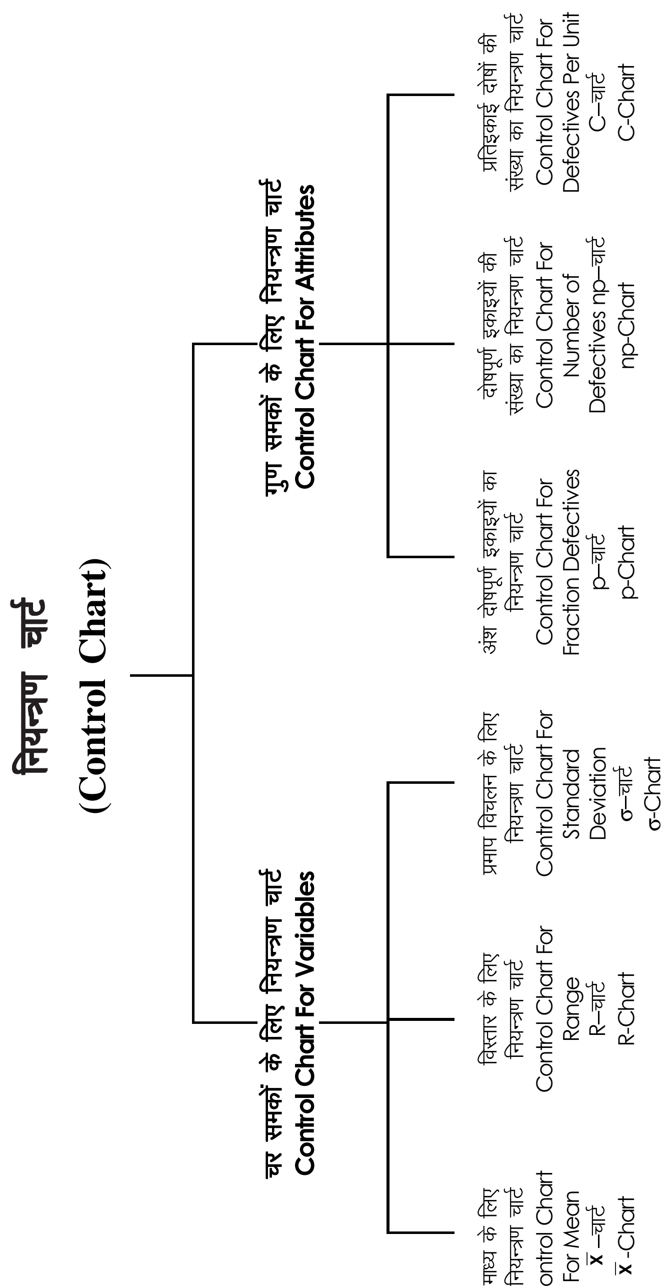
स्थित का विश्लेषण अवश्य करना चाहिए और कारणों को दूर करने का प्रयास करना चाहिए।

4.3 नियन्त्रण चार्टों प्रकार (Types of Control Charts)

आप जानते है कि समंक दो प्रकार से वर्गीकृत किये जाते हैं, (i) चर समंक एवं (ii) गुण समंक। चर समंक वह होते हैं जिनके विस्तार अथवा महत्व का मापन वास्तविक रुप से किया जा सकता है जैसे व्यक्तियों के किसी समूह की लम्बाई अथवा वजन का मापन, उनकी आय अथवा व्यय, या श्रमिकों की संख्या एवं उनका पारिश्रमिक इत्यादि। ऐसे समंकों का मापन शुद्धता के साथ किया जा सकता है।

गुण समंक वह होते हैं जिनके विस्तार अथवा महत्व का मापन करना सम्भव नहीं होता है। ऐसे मामलों में व्यक्तियों के समूह के किसी विशेष गुण की उपस्थित अथवा अनुपस्थित का अध्ययन किया जा सकता है, जैसे पागलपन, गूंगा एवं बहरा होना, इमानदारी इत्यादि। पागलपन, गूंगा एवं बहरा होना किस सीमा तक है यह संख्यात्मक रुप से मापित नहीं किया जा सकता है। ऐसे समंकों (गुण) की संख्या की गिनती ही की जा सकती है।

नियन्त्रण चार्ट की विधि, चर समंक एवं गुण समंक, दोनों ही प्रकार के समंकों के विषय में, प्रयोग की जाती है। चर समकों के लिये, माध्य चार्ट ($\overline{X}$ चार्ट) प्रमाप विचलन चार्ट (σ चार्ट) एवं विस्तार चार्टों (R-Chart) की संरचना की जाती है। गुण समकों के विषय में अंश दोषपूर्ण इकाईयों के अनुपात का चार्ट (p-Chart), दोषों की संख्या का चार्ट (C-Chart) एवं दोषपूर्ण इकाइयों की संख्या का चार्ट (np Chart) की संरचना की जाती है।



4.4 चर समकों के लिये नियन्त्रण चार्ट (Control Chart for Variables)

चर समकों के मामलें में सांख्यिकीय गुण नियन्त्रण की परिधि में केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप जैसे माध्य तथा, विषमता के माप जैसे विस्तार एंव प्रमाप विचलन, का नियन्त्रण सम्मिलित किया जाता है। यहां पर यह पूर्वानुमानित किया जाता है कि सभी चरों का वितरण समान्य है। चर समकों के लिए माध्य चार्ट अथवा $\overline{X}$ चार्ट, विस्तार चार्ट अथवा R-चार्ट तथा प्रमाप विचलन चार्ट अथवा σ चार्ट बनाए जाते हैं।

4.4.1 माध्य के लिये नियन्त्रण चार्ट अथवा $\overline{X}$ चार्ट (Control Chart For Mean or $\overline{X}$ Chart)

उत्पादन प्रक्रिया से लिए गये विभिन्न प्रतिदर्श इकाइयों के संख्यात्मक मापों के माध्य नियन्त्रण सीमा में हैं कि नहीं यह देखने के लिए $\overline{X}$ चार्ट की संरचना की जाती हैं। दूसरे शब्दों में कहा जाए तो $\overline{X}$ चार्ट, मुख्यतः उत्पादन प्रक्रिया के माध्यों के उच्चावचन का अवलोकन करने के लिए, बनाए जाते हैं। इसके माध्यम से प्रतिदर्श माध्य का समग्र माध्य से विचरण ज्ञात किया जाता है तथा यह ज्ञात किया जाता है कि जो विचरण हैं उनका कारण दैव है अथवा निर्दिष्ट हैं। $\overline{X}$ चार्ट की संरचना की विधि निम्न प्रकार से है–

(i) सर्वप्रथम, उत्पादन प्रक्रिया से दैव रुप से प्रतिदर्श इकाइयों का चयन करके उनका मापन कुशल एवं अनुभवी हाथों द्वारा किया जाना चाहिए।

(ii) प्रतिदर्शन के छोटे–छोटे समूह दैव रुप से इस प्रकार बनाने चाहिए कि समूह की प्रत्येक इकाई के चयन होने की सम्भावना समान हो। प्रतिदर्श समूह में इकाइयां उचित संख्या में होनी चाहिए। यह उचित संख्या कितनी होगी यह समग्र के आकार तथा वस्तुओं की प्रकृति एवं गुणवत्ता पर निर्भर करता है। सामान्यतः किसी भी प्रतिदर्श में कम से कम 5 इकाइयां होनी चाहिए। प्रारम्भ में प्रतिदर्श बड़ा हो सकता है पर जैसे–जेसे वह सीमाओं के भीतर स्थित पाए जाएगें तो उनका आकार छोटा किया जा सकता है।

(iii) विभिन्न प्रतिदर्श की संख्यात्मक मापों का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

(iv) सभी प्रतिदर्श माध्यों का माध्य (बड़ा माध्य) ज्ञात किया जाना–

$$\overline{\overline{X}} \quad \frac{\Sigma \overline{X}}{\text{(No.of Sample) प्रतिदर्श की संख्या}}$$

केन्द्रीय रेखा इसी $\overline{\overline{X}}$ पर स्थित होती है।

(v) विभिन्न प्रतिदर्शों के विस्तार का माध्य ज्ञात करना–

$$\overline{R} \quad \frac{\Sigma R}{\text{प्रतिदर्शों की संख्या (No of Samples)}}$$

(vi) नियन्त्रण सीमाएं ज्ञात करना–

मान लीजिए कि समग्र का माध्य μ है और प्रमाप विचलन σ है।

E $= \mu$ (E$\bar{X}$ = $\bar{X}$ का अनुमानित मूल्य)

SE of $\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ($\bar{X}$ का प्रमाप विभ्रम)

अतः ऊपरी नियन्त्रण सीमा U.C.L. $= \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

निम्न नियन्त्रण सीमा L.C.L. $= \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$

यदि $\frac{3}{\sqrt{n}}$=A तो सीमाएं $= \mu \pm A\sigma$

$\frac{3}{\sqrt{n}}$ के मूल्य विभिन्न प्रतिदर्श आकार के लिए इकाई के अन्त में दी गई सारणी से प्राप्त किये जा सकतें हैं।

यदि μ तथा σ के मूल्य न पता हो तो उनके स्थान पर उनके अनुमानित मूल्य रखे जा सकते हैं। इसे निम्न प्रकार से किया जा सकता है–

$$\bar{\bar{X}} \pm 3\left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \quad \bar{\bar{X}} \pm \left(\frac{3}{d_2\sqrt{n}}\right)\bar{R}$$

$$= \quad \bar{\bar{X}} \pm A2\bar{R} \quad \text{यहां } A2 = \left(\frac{3}{d_2\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{R}$ = प्रतिदशों के विस्तार का माध्य

$\bar{\bar{X}}$ = μ समग्र माध्य

$\bar{R}$/d2 = प्रमाप विचलन

d2 स्थिर कारक जिसके मूल्य विभिन्न प्रतिदर्श आकार के लिए इकाई के अन्त में दी गई सारणी से प्राप्त किये जा सकते हैं।

A2 के मूल्य विभिन्न संख्याओं के लिए सारणी से प्राप्त किये जा सकते है।

अतः

ऊपरी नियन्त्रण सीमा UCL $= \bar{\bar{X}} + A2\bar{R}$

निम्न नियन्त्रण सीमा LCL $= \bar{\bar{X}} - A2\bar{R}$

(vii) प्रमाप विचलनों के माध्य के आधार पर भी नियन्त्रण सीमाएं निम्न प्रकार से ज्ञात की जा सकती हैं–

सीमाएं $= \quad \bar{\bar{X}} \pm A_1\bar{\sigma}$

$$A_1\bar{\sigma} = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$A_1 = \left(\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \times \frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{3}{C_2\sqrt{n}}$$

(C2का मूल्य भी सारणी से प्राप्त किया जा सकता है)

(viii) $\bar{X}$ चार्ट की संरचना करना–X भुजाक्ष पर प्रतिदर्शों की संख्या एवं Y कोटि अक्ष पर गुणवत्ता का स्तर (माध्य मूल्य) को दिखाया जाएगा। प्रतिदर्शों के माध्य $\bar{X}_1 \bar{X}_2$.....को बिन्दुओं द्वारा अंकित किया जाएगा।